About the Book

आगे बढ़ने से पहले अपनी परीक्षा की तैयारी को और मजबूत करने के लिए हमारी नवीनतम प्रैक्टिस बुक के साथ तैयार हो जाओ, जो Agrawal Examcart के विशेषज्ञों द्वारा मेहनत से तैयार की गई है। यहाँ जानिए इसे लेने के मुख्य कारण :

- हमने पिछले वर्षों के पेपर्स, परीक्षा का पाठ्यक्रम और पैटर्न का पूरा आकलन किया है। विगत वर्षों के पेपर्स को ध्यान से विश्लेषित किया गया है और समझने का प्रयास किया गया है कि परीक्षा सेटर के दृष्टिकोण से कौन-कौन से अध्याय महत्वपूर्ण हैं, हर अध्याय पर कितने प्रश्न पूछे जाते हैं और इन प्रश्नों का कठिनाई स्तर भी तय किया जाता है।

- इस विस्तृत विश्लेषण के आधार पर, हमारी टीम ने एक प्रैक्टिस बुक तैयार की है जो अद्भुत और सटीक प्रैक्टिस सेट्स को संयोजित करती है। हमारा मानना है कि इस पुस्तक में दिया गया प्रत्येक प्रैक्टिस सेट आगामी परीक्षा पेपर से काफी मिलता जुलता होगा। हर पेपर को हल करने पर मिलने वाला परिणाम आपको आपके आगामी परीक्षा स्कोर का सही ढंग से पूर्वानुमान करने में मदद करेगा और साथ ही आपकी परीक्षा तैयारी का 80% की सटीकता के साथ आकलन करने में सक्षम होगा।

अपनी परीक्षा सफलता को किस्मत पर न छोड़ें। इस प्रैक्टिस बुक की कॉपी आज ही प्राप्त करें और अपनी तैयारी को अगले स्तर पर ले जाएँ।

अन्य महत्वपूर्ण पुस्तकें

AGRAWAL EXAMCART
Paper Pakka Fasega!
CB1877

TGT प्रशिक्षित स्नातक शिक्षक भर्ती परीक्षा (गणित) प्रैक्टिस सेट्स एवं सॉल्व्ड पेपर्स
ISBN - 978-93-6054-966-4
9789360549664
₹ 459

TGT प्रशिक्षित स्नातक शिक्षक भर्ती परीक्षा (गणित) प्रैक्टिस सेट्स एवं सॉल्व्ड पेपर्स
CB1877
AGRAWAL EXAMCART

TOP SELLING TGT PRACTICE SETS

AGRAWAL EXAMCART
Paper Pakka Fasega!

उत्तर प्रदेश माध्यमिक शिक्षा सेवा चयन बोर्ड द्वारा आयोजित

TGT

प्रशिक्षित स्नातक शिक्षक भर्ती परीक्षा

Most Updated Book!
UP TGT के सभी नवीनतम पेपर्स इस पुस्तक में शामिल हैं।

गणित

15 प्रैक्टिस सेट्स एवं 05 सॉल्व्ड पेपर्स

(2021, 2019, 2018, 2016, 2015)

LT.Grade

Code	Price	Pages	ISBN
CB1877	₹459	461	978-93-6054-966-4

विषय सूची

सॉल्व्ड पेपर्स

प्रैक्टिस सेट्स

प्रैक्टिस सेट-1

1. सदिशों $\vec{u}=\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k},\ \vec{v}=-2\hat{i}+3\hat{k},$ $\vec{\omega}=7\hat{j}-4\hat{k}$ द्वारा निर्मित समान्तर षट्फलक का आयतन होगा
(A) 23 घन इकाई
(B) 33 घन इकाई
(C) – 31 घन इकाई
(D) 21 घन इकाई

2. उस समतल का समीकरण क्या होगा जो बिन्दु $2\hat{i}+6\hat{j}-6\hat{k}, -3\hat{i}+10\hat{j}-9\hat{k}$ तथा $-5\hat{i}-6\hat{k}$ से होकर जाता है?
(A) $r.(2\hat{i}-\hat{j}-2\hat{k})=8$
(B) $r.(2\hat{i}-\hat{j}-2\hat{k})=2$
(C) $r.(2\hat{i}-\hat{j}-2\hat{k})=72$
(D) $r.(2\hat{i}-\hat{j}-2\hat{k})=18$

3. बिन्दु $P_0(-3, 0, 7)$ से होकर जाने वाली और सदिश $\vec{x}=5\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$ के लम्बवत् समतल का समीकरण है–
(A) $5x+2y+z-22=0$
(B) $5x+2y+2z+22=0$
(C) $5x+2y-z+22=0$
(D) $5x+2y-2z-22=0$

4. $a=(1,1,1)$ तथा $\vec{c}=(0,1,-1)$ दिये गये दो सदिश है। सदिश b क्या होगा जबकि $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}$ तथा $\vec{a}.\vec{b}=10$ है ?
(A) (4, 3, 3) (B) (3, 3, 3)
(C) (3, 2, 2) (D) (2, 2, 2)

5. सदिश $2i-j+k$, $i-3j-5k$ तथा $3i-4j-4k$ एक त्रिभुज की भुजाएँ हैं। निम्नलिखित में से कौन उनमें से किन्हीं दो के बीच का कोण है?
(A) $\cos^{-1}\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{41}}$
(B) $\cos^{-1}\frac{6}{\sqrt{41}}$
(C) $\cos^{-1}\frac{6\sqrt{6}}{\sqrt{41}}$
(D) इनमें से कोई नहीं

6. अवकल समीकरण $(e^y+1)\cos x\,dx+e^y\sin x\,dy=0$ का हल है–
(A) $\cos x\,(e^y+1)=C$
(B) $\sin x\,(e^y+1)=C$
(C) $\sin x\,(e+1)=C$
(D) $-\sin x\,(e^y+1)=C$

7. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{y^2+\sin y}$ का हल है–
(A) $x=\frac{y^3}{3}-\sin y+C$
(B) $x=\frac{y^3}{3}+\cos y+C$
(C) $x=\frac{y^2}{2}-\cos y+C$
(D) $x=\frac{y^3}{3}-\cos y+C$

8. वह समीकरण जिसके मूल $\frac{1}{2}$ तथा $\frac{1}{3}$ हैं, होगा–
(A) $x^2-2x+3=0$
(B) $3x^2-2x+1=0$
(C) $6x^2-5x+1=0$
(D) $x^2-5x+6=0$

9. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx}=\frac{x}{x^2+1}$ का हल है–
(A) $y=\log(x^2+1)+C$
(B) $y=\frac{1}{2}\log(x^2+1)+C$
(C) $y=\frac{1}{2}\log(x^3+1)+C$
(D) $y=\frac{1}{2}\log(x+1)+C$

10. अवकल समीकरण $x\frac{dy}{dx}+my=e^{-x}$ में यदि समाकलीनीय गुणांक $\frac{1}{x^2}$ है तो m का मान है–
(A) 2 (B) –2
(C) 1 (D) –1

11. अवकल समीकरण $(1-x^2)\frac{dy}{dx}-xy=1$ का समकलन गुणांक है :
(A) $-x$ (B) $-\frac{x}{1-x^2}$
(C) $\sqrt{1-x^2}$ (D) $\frac{1}{2}\log(1-x^2)$

12. $(1+i)^5\left(1+\frac{1}{i}\right)^5$ का मान है :
(A) 64 (B) 32
(C) 16 (D) 8

13. यदि किसी गुणोत्तर श्रेणी का $(p+q)$वाँ पद m और $(p-q)$वाँ पद n हो, तो pवाँ पद होगा
(A) $\sqrt{mn}$ (B) $\sqrt{\frac{m}{n}}$
(C) $\sqrt{\frac{n}{m}}$ (D) $(mn)^{3/2}$

14. 'A' एक 52 पत्तों की ताश की गड्डी से 2 पत्ते पुनर्स्थापित (Replacement) करते हुए खींचे गए और 'B' पाँसे के एक जोड़े (Pair) को फेंकता है। तब A के दोनों पत्ते समान सूट (Suit) से और B के 6 का योग प्राप्त करने की प्रायिकता है
(A) 1/144 (B) 1/4
(C) 5/144 (D) 7/144

15. यदि घटनाएँ A,B परस्पर अपवर्जी हैं, तब $P(A\cup B)$ बराबर होगी
(A) P(A) + P (B) (B) P(A) – P (B)
(C) P(A) P (B) (D) P(A/P) (B)

16. श्रेणी $1+\frac{1^2+2^2}{2!}+\frac{1^2+2^2+3^2}{3!}+...\infty$ तब का योगफल होगा
(A) $\frac{17}{6}e$ (B) $\frac{15}{7}e$
(C) $\frac{19}{6}e$ (D) $\frac{13}{6}e$

17. किसी त्रिभुज में दो बड़ी भुजाओं की लम्बाइयाँ क्रमशः 24 और 22 हैं। यदि कोण समान्तर श्रेणी में हो, तो तीसरी भुजा की लम्बाई होगी
(A) $12-2\sqrt{3}$ (B) $12\sqrt{3}+2$
(C) $12+2\sqrt{3}$ (D) इनमें से कोई नहीं

18. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}[(n+1)(n+2)(n+3)\dots(n+n)]^{1/n}$ बराबर है—

(A) e (B) $1/e$
(C) $2/e$ (D) $4/e$

19. $\int \tan^{-1}\sqrt{x}\,dx$ बराबर है—

(A) $(x+1)\tan^{-1}\sqrt{x}-\sqrt{x}+c$
(B) $(x+1)\tan^{-1}\sqrt{x}+\sqrt{x}+c$
(C) $x\tan^{-1}\sqrt{x}+\sqrt{x}+c$
(D) $x\tan^{-1}\sqrt{x}+\sqrt{x}+c$

20. $\int\frac{\sin x\cos x}{1+\sin^4 x}dx$ बराबर है-

(A) $\log(1+\sin^4 x)+c$
(B) $\frac{1}{2}\log\left(1+\sin^2 x\right)+c$
(C) $\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\sin^2 x\right)+c$
(D) $\tan^{-1}(\sin^2 x)+c$

21. समाकलन

$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left[\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2+\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2-2\right]^{\frac{1}{2}}dx$ का मान है—

(A) $\log\left(\frac{4}{3}\right)$ (B) $4\log\left(\frac{3}{4}\right)$
(C) $4\log\left(\frac{4}{3}\right)$ (D) $\log\left(\frac{3}{4}\right)$

22. $\sin^{-1}x$ का $\cos^{-1}\sqrt{1-x^2}$ के सापेक्ष अवकलन है—

(A) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (B) $\sin^{-1}x$
(C) $\cos^{-1}x$ (D) 1

23. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}dx$ का मान निम्नलिखित में से कौन-सा है?

(A) $\frac{\pi}{2}$ (B) $\frac{\pi}{3}$
(C) $\frac{\pi}{6}$ (D) इनमें से कोई नहीं

24. x^2 के सापेक्ष x^3 का अवकलन क्या है?

(A) $3x^2$ (B) $\frac{3x}{2}$
(C) x (D) $\frac{3}{2}$

25. यदि $y=x^x$ है, तो $x=1$ पर $\frac{dy}{dx}$ किसके बराबर है?

(A) 0 (B) 1
(C) –1 (D) 2

26. ऐसी दो धन संख्याएँ ज्ञात कीजिए, जिनका योग 16 हो और जिनके घनों का योग निम्नतम हो—

(A) 4 तथा 12 (B) 6 तथा 10
(C) 8 तथा 8 (D) इनमें से कोई नहीं

27. माना कि तीन समुच्चय A, B और C हैं। तब $(A-B)\cup(A-C)$ बराबर होंगे

(A) $A\cap(B\cap C)$ (B) $A\cup(B-C)$
(C) $A\cap(B-C)$ (D) $A-(B\cap C)$

28. शब्द VOWELS से कितने शब्द बन सकते हैं यदि शब्द E से प्रारम्भ हो ?

(A) 12 (B) 5
(C) 120 (D) 240

29. यदि ${}^nP_r = 120.\,{}^nC_r$ तब r का मान है—

(A) 6 (B) 5
(C) 4 (D) 3

30. सीमा $\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2^2}{n^2}\right)\left(1+\frac{3^2}{n^2}\right)\dots\left(1+\frac{n^2}{n^2}\right)^{1/n}\right]$ का मान है

(A) $4e^{(\pi-4)}$ (B) $3e^{(\pi-4)}$
(C) $2e^{\left(\frac{\pi-4}{2}\right)}$ (D) $e^{\left(\frac{\pi-4}{2}\right)}$

31. यदि फलन $f(x)$ जो कि

$$f(x)=\begin{cases}3ax+b & \text{यदि } x>1\\ 11 & \text{यदि } x=1\\ 5ax-2b & \text{यदि } x<1\end{cases}$$

द्वारा प्रदत्त है, पर सतत् है, $x=1$, तो a और b का मान है

(A) $a=2, b=3$ (B) $a=1, b=4$
(C) $a=3, b=2$ (D) $a=4, b=1$

32. अंकों 1, 2, 3, 4, 5, 6 से 4 अंकों की कितनी संख्याएँ बनाई जा सकती हैं, अंकों की पुनरावृत्ति न हो?

(A) 240 (B) 150
(C) 720 (D) 360

33. $\sin^p x\cos^q x$ का एक महत्तम बिन्दु होगा—

(A) $x=\tan^{-1}\sqrt{\frac{p}{q}}$
(B) $x=\tan^{-1}\sqrt{\frac{q}{p}}$
(C) $x=\tan^{-1}\left(\frac{p}{q}\right)$
(D) $x=\tan^{-1}\left(\frac{q}{p}\right)$

34. $\tan\left[\cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right]$ का मान है—

(A) $\frac{6}{17}$ (B) $\frac{7}{16}$
(C) $\frac{17}{6}$ (D) इनमें से कोई नहीं

35. त्रिभुज ABC में, $2ac\sin\frac{1}{2}(A-B-C)$ बराबर होगा—

(A) $a^2+b^2-c^2$ (B) $c^2+a^2-b^2$
(C) $b^2-c^2-a^2$ (D) $c^2+a^2-b^2$

36. यदि $\sin^{-1}x+\sin^{-1}2x=\pi/3$ तो $\boldsymbol{x}$ का मान होगा—

(A) $\pm\sqrt{3/2}\sqrt{7}$ (B) $\pm\sqrt{3}/\sqrt{7}$
(C) 0 (D) 1

37. यदि $x_n=\cos(\pi/3^n)+i\sin(\pi/3^n)$, तो $x_1.x_2.x_3.\dots\dots\infty$ तक का मान है—

(A) 1 (B) i
(C) –1 (D) $-i$

38. यदि $\tan\theta+\sin\theta=m$ तथा $\tan\theta-\sin\theta=n$ हो, तो m^2-n^2 का मान बराबर है—

(A) $4\sqrt{(mn)}$ (B) $4mn$
(C) $2\sqrt{(mn)}$ (D) $\sqrt{(mn)}$

39. उस रेखा का समीकरण, जो बिन्दु $(a\cos^3\theta, a\sin^3\theta)$ से होकर जाती है तथा $x\sec\theta+y\,\mathrm{cosec}\,\theta=a$ पर लम्ब है, होगा—

(A) $x\cos\theta+y\sin\theta=a\sin 2\theta$
(B) $x\sin\theta+y\,\mathrm{cosec}\,\theta=a\cos 2\theta$
(C) $x\sin\theta-y\cos\theta=a\sin 2\theta$
(D) $x\cos\theta-y\sin\theta=a\cos 2\theta$

40. $\tan\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)\tan\left(\frac{3\pi}{4}+\theta\right)$ का मान होगा—

(A) 1 (B) –1
(C) 0 (D) 2

41. tan 3A tan 2A tan A बराबर है

(A) tan 3A – tan 2A – tan A
(B) tan 3A + tan 2A + tan A
(C) tan 3A tan 2A – tan A
(D) उपर्युक्त में से कोई नहीं

42. यदि $3\cos x=5\sin x$, तो

$\frac{5\sin x-2\sec^3 x+2\cos x}{5\sin x+2\sec^3 x-2\cos x}$ का मान है—

(A) $\frac{361}{2397}$ (B) $\frac{271}{979}$

(C) $\frac{541}{979}$ (D) $\frac{127}{979}$

43. $3 + 4i$ का वर्गमूल क्या है, जहाँ $i = \sqrt{-1}$ हो?

(A) $2 + i$ (B) $2 - i$

(C) $-2 + i$ (D) $-3-1$

44. वक्र $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ की स्पर्श रेखा x-अक्ष के समान्तर है, स्पर्श बिन्दु का भुज है—

(A) $x = 0$ व 0 (B) $x = 1$ व -1

(C) $x = 1$ व -3 (D) $x = -1$ व 3

45. यदि $A + B = \frac{\pi}{4}$ हो, तो $(1 + \tan A)(1 + \tan B)$ होगा–

(A) 1 (B) 0

(C) $\frac{1}{2}$ (D) 2

46. यदि $p = \sec\theta + \tan\theta$ तो $\frac{p^2-1}{p^2+1}$ का मान है

(A) $\sin\theta$ (B) $\cos\theta$

(C) $\sec\theta$ (D) $\tan\theta$

47. किसी मीनार के आधार से आधार रेखा पर क्रमश: a और b दूरी पर स्थित दो बिन्दु P और Q के मीनार के शिखर से अवनमन कोण कोटिपूरक हैं। मीनार की ऊँचाई है

(A) $\sqrt{ab}$ (B) $\sqrt{\frac{a}{b}}$

(C) ab (D) $\sqrt{\frac{b}{a}}$

48. यदि $A = \{3, 4, 7, 8\}$, $B = \{1, 5, 6, 4, 3\}$, $C = \{4, 5, 9, 3, 8, 6\}$, तो $(A \cup B) \cap C$ है-

(A) $\{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

(B) $\{3, 4, 5, 6, 8\}$

(C) $\{3, 4\}$

(D) इनमें से कोई नहीं

49. तीन संख्याओं 4, 6 और 8 की बारम्बारताएँ क्रमश: $(x + 2)$, x व $(x - 1)$ हैं। यदि बंटन का समान्तर माध्य 5.76 हो, तब x का मान है

(A) 7 (B) 6

(C) 10 (D) 8

50. निम्न सारणी का माध्य विचलन होगा

प्राप्तांक	40-44	35-39	30-34	25-29
आवृत्ति	2	3	4	5

(A) 7.24 (B) 4.48

(C) 6.44 (D) 34.8

51. एक कक्षा के 15 बालकों के वजन नीचे दी गई सारणी के अनुसार हैं

वजन (किग्रा में)	31	34	35	36	37
बालकों की संख्या	2	3	4	5	1

बालकों के वजन के बण्टन की माध्यिका होगी-

(A) 34.5 किग्रा (B) 35 किग्रा

(C) 35.5 किग्रा (D) इनमें से कोई नहीं

52. यदि n प्रेक्षणों $x_1, x_2, x_3 ..... x_n$ का समान्तर माध्य $\bar{x}$ है, तो $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})$ बराबर है

(A) 0 (B) 1

(C) ∞ (D) इनमें से कोई नहीं

53. दो बल P तथा Q यदि ऐसे कोण पर कार्य करें कि उनका परिणामी बल R, बल P के बराबर हो, तो यदि P को दोगुना किया जाय, तो नये परिणामी बल और Q के साथ बना कोण होगा

(A) 30° (B) 60°

(C) 45° (D) 90°

54. एक पत्थर विरामावस्था मे किसी ऊँचाई से पृथ्वी पर 5 सेकण्ड में पहुँचता है। यदि गिरने के 3 सेकण्ड बाद पत्थर को रोक कर फिर गिरने दिया जाए तो पृथ्वी पर पत्थर कितनी देर में गिरेगा ?

(A) 3 सेकण्ड (B) 4 सेकण्ड

(C) 4.5 सेकण्ड (D) इनमें से कोई नहीं

55. उस इंजन की अश्वशक्ति क्या होगी जो 100 मीटर गहराई से 300 किग्रा पानी प्रति सेकण्ड ऊपर खींचता है?

(A) 300 (B) 350

(C) 380 (D) इनमें से कोई नहीं

56. 12 किमी प्रति घण्टा के वेग से उत्तर दिशा की ओर जाने वाले एक जहाज को 10 किमी पूर्व में एक जहाज दिखाई देता है जो 16 किमी प्रति घण्टा के वेग से पश्चिम की ओर जा रहा है। कुछ समय पश्चात वे एक-दूसरे से न्यूनतम दूरी पर होते है। उस समय उनके बीच की दूरी क्या होगी?

(A) $2\sqrt{61}$ किमी (B) 8 किमी

(C) 6 किमी (D) 4 किमी

57. यदि एक सामान्य रज्जू (कैटनरी) किसी बिन्दु P पर तनाव T और निम्नतम बिन्दु C पर तनाव T_0 हो तथा चाप CP का भार W हो, तो

(A) $T^2 + T_0^2 = W^2$

(B) $T^2 - T_0^2 = W^2$

(C) $T + T_0 = W$

(D) $T - T_0 = W$

58. यदि z एक सम्मिश्र संख्या है, तो निम्न में से कौन-सा कथन सत्य है ?

(A) $(z\bar{z})$ विशुद्ध काल्पनिक है

(B) $(z\bar{z})$ अऋणात्मक वास्तविक है

(C) $(z - \bar{z})$ विशुद्ध वास्तविक है

(D) $(z + \bar{z})$ विशुद्ध काल्पनिक है

59. यदि ω इकाई का घनमूल है, तो $(1 + \omega - \omega^2)^2 + (1 - \omega + \omega^2)^2 + 1$ का मान होगा-

(A) -1 (B) 7

(C) 1 (D) -3

60. यदि $(1 + i\sqrt{3})^{12} = a + ib$ है, जहाँ a तथा b वास्तविक हैं, तब b का मान होगा-

(A) $(\sqrt{3})^{12}$ (B) $(2)^{12}$

(C) 0 (D) 1

61. यदि $(5 + 2\sqrt{6})^{(x^2-3)} + (5 - 2\sqrt{6})^{(x^2-3)} = 10$, तब x का मान है :

(A) ± 3 या $\pm\sqrt{3}$ (B) ± 5 या $\pm\sqrt{5}$

(C) ± 4 या $\pm\sqrt{4}$ (D) ± 2 या $\pm\sqrt{2}$

62. माना कि $V = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0\}$ और $W = \{(x, y) : xy \geq 0\}$, R^2 के उपसमुच्चय हैं, तब

(A) V और W उपसमष्टि है

(B) V उपसमिष्ट है लेकिन W नहीं

(C) W उपसमिष्ट है लेकिन V नहीं

(D) V और W उपसमष्टि नहीं हैं

63. यदि दो फलन f और g

(i) $[a, b]$ में सतत हैं

(ii) $]a, b[$ में अवकलनीय हैं

(iii) $f(x) = g'(x) \forall x \in]a, b[$ तब कौन-सा सत्य है?

(A) f और g में नियतांक का अन्तर है।

(B) f और g सदैव समान हैं।

(C) f और g कभी समान नहीं हो सकते हैं।

(D) उपरोक्त में से कोई नहीं।

64. निम्नलिखित में कौन सही है जहाँ $i = \sqrt{-1}$?

(A) $1 - i > 2 - i$ (B) $2 + i > 1 + i$

(C) $2 - i > 1 + i$ (D) इनमें से कोई नहीं

65. प्राकृतिक संख्याओं के समुच्चय N पर एक सम्बन्ध R, $\{(x, y): x, y \in N, 2x + y = 41\}$ के द्वारा परिभाषित है, तब R है

(A) स्वतुल्य (B) सममित

(C) संक्रमक (D) इनमें से कोई नहीं

66. $\sinh^{-1}(\cos\theta)$ बराबर है–
(A) $\log(\cot\theta + \operatorname{cosec}\theta)$
(B) $\log(\cot\theta - \operatorname{cosec}\theta)$
(C) $\log(\cos\theta + \sin\theta)$
(D) $\log(\cos\theta - \sin\theta)$

67. एक संक्रिया* को वास्तविक संख्याओं पर $a * b = 1 + a + ab$ द्वारा परिभाषित करते हैं, तब संक्रिया *
(A) क्रमविनिमेय है लेकिन साहचर्य नहीं
(B) साहचर्य है लेकिन क्रयविनिमेय नहीं
(C) साहचर्य और क्रमविनिमेय दोनों नहीं
(D) साहचर्य और क्रमविनिमेय दोनों है

68. प्राकृतिक संख्याओं के समुच्चय पर एक सम्बन्ध R, aRb से परिभाषित है कि a और b सह-अभाज्य हैं तब R होगा–
(A) स्वतुल्य एवं सममित
(B) संक्रमक एवं सममित
(C) स्वतुल्य एवं संक्रमक
(D) एक तुल्यता सम्बन्ध

69. वक्र $x = 3t^2 + 1, y = t^3 - 1$ की $x = 1$ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता है
(A) 0 (B) $\frac{1}{2}$
(C) ∞ (D) –2

70. $\sqrt{-i}$ का मान, जहाँ $i = \sqrt{-1}$, किसके बराबर है?
(A) $\pm\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)$ (B) $\pm\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)$
(C) $\pm\left(\frac{1-i}{2}\right)$ (D) $\pm\left(\frac{1-i}{2}\right)$

71. सम्मिश्र संख्या $(-1 - i)$ का, जहाँ $i = \sqrt{-1}$ कोणांक क्या है?
(A) $\frac{5\pi}{4}$ (B) $-\frac{5\pi}{4}$
(C) $\frac{3\pi}{4}$ (D) इनमें से कोई नहीं

72. एक रेखा, जो x-अक्ष के समान्तर है और वक्र $y = \sqrt{x}$ से 45° के कोण पर मिलती है
(A) $x = \frac{1}{4}$ (B) $y = \frac{1}{4}$
(C) $y = \frac{1}{2}$ (D) $y = 1$

73. ABC एक समकोण त्रिभुज है। शीर्ष A से कर्ण BC पर AD लम्ब डाला गया। यदि AB = 5 सेमी तथा AC = 12 सेमी, तो AD की लम्बाई है–
(A) 156/3 सेमी (B) 65/12 सेमी
(C) 60/13 सेमी (D) 117/8 सेमी

74. एक त्रिभुज के शीर्ष (4, 6), (2, – 2) और (0, 2) हैं। इसके केन्द्रक के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।
(A) (2, 1) (B) (2, 3)
(C) (2, 2) (D) (1, 2)

75. A(3, 5), B (– 4, 8) तथा C (– 6, –2) एक त्रिभुज के क्रमशः शीर्षों के निर्देशांक हैं। त्रिभुज की माध्यिका का समीकरण है–
(A) $x + 4y - 17 = 0$
(B) $4x + y + 17 = 0$
(C) $x - 4y + 17 = 0$
(D) $y - 4x - 17 = 0$

76. निम्नलिखित में से कौन-सा समुच्चय समष्टीय समुच्चय है?
(A) A = {x : x एक चतुर्भुज है}
(B) B = {x : x एक समान्तर चतुर्भुज है}
(C) C = {x : x एक आयत है}
(D) D = {x : x एक वर्ग है}

77. व्यंजक $1.(2 - \omega)(2 - \omega^2) + 2.(3 - \omega)(3 - \omega^2) + ... + (n - 1)(n - \omega)(n - \omega^2)$, जहाँ ω एक इकाई का काल्पनिक घनमूल है, का मान है–
(A) $\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$
(B) $\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2 - n$
(C) $\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2 + n$
(D) इनमें से कोई नहीं

78. बिन्दु (1, –2) से जाने वाली तथा दोनों अक्षों से बराबर अन्तःखण्ड काटने वाली रेखा का समीकरण है–
(A) $x + y = 1$ (B) $x - y = 1$
(C) $x + y + 1 = 0$ (D) $x - y - 1 = 0$

79. एक बिन्दु इस प्रकार गति करता है कि इसकी बिन्दु (3, –2) से दूरी का वर्ग संख्यात्मक रूप से इसकी रेखा $5x - 12y = 13$ से दूरी के बराबर रहता है। बिन्दु के बिन्दुपथ का समीकरण है।
(A) $x^2 + y^2 - 11x + 16y = 0$
(B) $x^2 + y^2 - 11x + 16y + 26 = 0$
(C) $x^2 + y^2 - 11x - 16y - 26 = 0$
(D) $13x^2 + 13y^2 - 83x + 64y + 182 = 0$

80. रेखाओं $\sqrt{3}x - y = 5$ तथा $x - \sqrt{3}y = 7$ के बीच का कोण है–
(A) 30° (B) 45°
(C) 60° (D) इनमें से कोई नहीं

81. वक्र $y = \log x$, x –अक्ष और $x = e$ अन्तर्गत घिरे हुए क्षेत्र का क्षेत्रफल है–
(A) e (B) 1
(C) ∞ (D) इनमें से कोई नहीं

82. परवलय $y^2 = 4ax$ और सरल रेखा $y = 2ax$ के अन्तर्गत घिरे हुए क्षेत्र का क्षेत्रफल होगा।
(A) $\frac{a^2}{3}$ (B) $\frac{1}{3a^2}$
(C) $\frac{1}{3a}$ (D) $\frac{2}{3a}$

83. बिन्दु (1, 2, – 4) से गुजरने वाली रेखाओं $\frac{x-8}{3} = \frac{y+19}{-16} = \frac{z-10}{7}$ एवं $\frac{x-15}{3} = \frac{y-29}{8} = \frac{z-5}{-5}$ पर लम्बा रेखा का समीकरण है–
(A) $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+4}{6}$
(B) $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+4}{6}$
(C) $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+4}{8}$
(D) उपरोक्त में से कोई नहीं

84. यदि $y = 2x + c$ परवलय $y^2 = 8(x + 2)$ को स्पर्श करती है, तब–
(A) $c = 5$ (B) $c = 3$
(C) $c = 2$ (D) $c = 1$

85. उस गोले का आयतन क्या होगा जो वृत्त $x^2 + y^2 = 4, z = 0$ तथा बिन्दु (1, 2, –1) से होकर जाता है?
(A) $\frac{40}{3}\pi$ (B) $\frac{17\sqrt{17}}{6}\pi$
(C) $\frac{20\sqrt{5}}{3}\pi$ (D) इनमें से कोई नहीं

86. शर्त $|z - 3i| = 2$ की सन्तुष्टि करे तब z का बिन्दुपथ होगा–
(A) वृत्त (B) परवलय
(C) दीर्घवृत्त (D) x-अक्ष

87. उत्केन्द्रता e वाला शांकव दीर्घवृत्त निरूपित करता है यदि–
(A) $e = 1$ (B) $0 < e < 1$
(C) $e > 1$ (D) $e = 0$

88. सरल रेखाओं $x\sqrt{3}-y=5$ तथा $x+y\sqrt{3}=4$ के बीच का कोण है

(A) $\frac{\pi}{6}$ (B) $\frac{\pi}{3}$

(C) $\frac{\pi}{4}$ (D) $90°$

89. यदि z एक सम्मिश्र संख्या है, तब $(z + 5)(\bar{z}+5)$ बराबर होगा :

(A) $|z+5i|^2$ (B) $|z-5|^2$

(C) $(z+5)^2$ (D) $|z+5|^2$

90. यदि फलन $f : [a, a+h] : h, 0$ पर इस प्रकार परिभाषित है कि (i) $f, [a, a+h]$ पर सतत है (ii) $f, [a, a+h]$ पर अवकलनीय है तब एक $\theta, 0 < \theta < 1$ का अस्तित्व इस प्रकार है कि $f[a+h] = f(a) + hf'(a+\theta h)$ कहलाता है–

(A) रॉली प्रमेय (B) टेलर प्रमेय

(C) न्यूटन प्रमेय (D) लग्रांजी प्रमेय

91. यदि $A=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & -3\end{bmatrix}$ और $I=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ तब निम्न में कौन शून्य आव्यूह है?

(A) $A^2+5A+6I$ (B) $A^2-5A+6I$

(C) $A^2-5A-6I$ (D) $A^2+5A-6I$

92. आव्यूह $\begin{bmatrix}0 & 3 & 5+2i\\ -3 & 0 & -9\\ -5-2i & 9 & 0\end{bmatrix}$ है एक

(A) सममित आव्यूह

(B) विषम सममित आव्यूह

(C) हर्मिशीय आव्यूह

(D) विषम हर्मिशीय आव्यूह

93. यदि $a + b + c = 0$ हो, तब

$\begin{bmatrix}a-x & c & b\\ c & b-x & a\\ b & a & c-x\end{bmatrix}=0$ का एक हल है–

(A) शून्य (B) $a+b-c$

(C) $a+b+c$ (D) $-a+b+c$

94. यदि $\begin{vmatrix}0 & x-a & x-b\\ x+a & 0 & x-c\\ x+b & x+c & 0\end{vmatrix}=0,$ तब x का मान बराबर है–

(A) 2 (B) 1

(C) 0 (D) 3

95. सारणिक $\begin{vmatrix}2 & e & 3\\ 2 & \pi & 3\\ 2 & \sqrt{2} & 3\end{vmatrix}$ का मान होगा–

(A) π (B) e

(C) शून्य (D) $e-\pi+\sqrt{2}$

96. सारणिक $\begin{vmatrix}2 & 8 & 4\\ -5 & 6 & -10\\ 1 & 7 & 2\end{vmatrix}$ का मान होगा–

(A) –440 (B) 0

(C) 328 (D) 484

97. यदि $x^2-3x+k=10$ के मूलों का गुणनफल –2 हो, तो k का मान होगा

(A) – 2 (B) 8

(C) 12 (D) – 8

98. यदि समीकरण $x^2-px+8p-15=0$ के दोनों मूल समान हैं, तो p का मान है–

(A) 3 या 5 (B) 2 या 5

(C) 3 या 4 (D) 2 या 30

99. समुच्चय $\{x : x^3 - 4x = 0\}$ के समान समुच्चय है–

(A) $\{-2, 0, 2\}$ (B) $\{2, 0, -3\}$

(C $\{-3, 0, 2\}$ (D) $\{2, 0, -2\}$

100. एक त्रिभुज की भुजाएँ 15 सेमी, 20 व 25 सेमी हों, तो त्रिभुज के परिवृत्त की त्रिज्या है–

(A) 5 सेमी (B) 10 सेमी

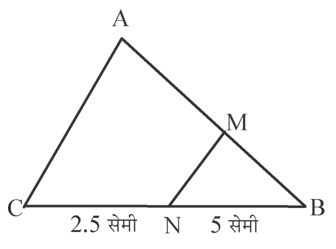
(C) 12.5 सेमी (D) इनमें से कोई नहीं

101. $3^{4n+2}+5^{2n+1}$ निम्नलिखित में से किस संख्या से पूर्ण रूप से विभाजित होगी?

(A) 15 (B) 14

(C) 13 (D) 12

102. यदि AC || MN, BN = 5 सेमी एवं NC = 2.5 सेमी, तो BM : AM का मान होगा–



(A) 1 : 2 (B) 2 : 1

(C) 1 : 3 (D) 3 : 1

103. दी गई समीकरण $(a^2-bc)x^2+2(b^2-ac)x+(c^2-ab)=0$ के मूल समान होंगे, यदि

(A) $a^2+b^2+c^2=3abc$

(B) $a^3+b^3+c^3=0$

(C) $a^3+b^3+c^3=3abc$

(D) $a+b+c=2\,abc$

104. कितने बिन्दुओं पर बहुपद $(x+1)(x+3).\,x, x$-अक्ष को काटता है?

(A) 3 (B) 2

(C) 1 (D) 4

105. एक सरल रेखा में गति करते हुए किसी पिण्ड का वेग v निम्नानुसार परिवर्तित होता है।

$$v=\begin{cases}2t+13, & 0\le t\le 5\\ 3t+8, & 5<t\le 7\\ 4t+1, & t>7\end{cases}$$

जहाँ दूरी मीटर में तथा समय सेकण्ड में है, तब 10 सेकण्ड के पश्चात् कण द्वारा चली गई दूरी (मीटर में) है–

(A) 127 (B) 247

(C) 186 (D) 313

106. एक ट्रेन A पूर्व की ओर 30 किमी/घण्टा के वेग से तथा दूसरी ट्रेन B पश्चिम की ओर 40 किमी/घण्टा के वेग से समान्तर रेखाओं में गति कर रही है। ट्रेन B के सापेक्ष ट्रेन A का वेग है–

(A) 10 किमी/घण्टा

(B) 70 किमी/घण्टा, पूर्व की ओर

(C) 70 किमी/घण्टा, पश्चिम की ओर

(D) इनमें से कोई नहीं

107. यदि एक कण सरल रेखा में, समरूप त्वरण से गति कर रहा है। तब क्रमिक सेकण्डों में इसके द्वारा तय की गयी दूरियाँ हैं–

(A) समान्तर श्रेणी में (B) गुणोत्तर श्रेणी में

(C) हरात्मक श्रेणी में (D) इनमें से कोई नहीं

108. एक मकान में कई मंजिलें हैं। सबसे नीचे की मंजिल 20 फुट ऊँची है। एक पत्थर, जो कि मकान की छत से गिराया जाता है, सबसे नीचे की मंजिल को $\frac{1}{4}$ सेकण्ड में पार करता है। मकान की ऊँचाई है–

(A) 100 फुट (B) 110 फुट

(C) 110.25 फुट (D) इनमें से कोई नहीं

109. एक पिण्ड का अधिकतम भार होता है–

(A) पृथ्वी सतह पर

(B) पृथ्वी सतह से ऊपर

(C) पृथ्वी के भीतर

(D) पृथ्वी के केन्द्र पर

110. एक हल्की डोरी एक चिकनी घिरनी के ऊपर से होकर जाती है और इसके सिरों पर 3 किग्रा और 5 किग्रा के पिण्ड बँधे हैं। पिण्डों के 9 मीटर चलने के बाद डोरी टूट जाती है। 3 किग्रा का पिण्ड कितना और ऊपर जायेगा ? (g = 10 मीटर/सेकण्ड^2)

(A) 1.75 मीटर (B) 1.95 मीटर

(C) 2.05 मीटर (D) 2.25 मीटर

111. 0.001 आधार पर 0.0001 का लघुगणक होगा–

(A) 4/3 (B) 3/2

(C) 3/4 (D) 2/3

112. एक कण $2\sqrt{(2g)}$ वेग से इस प्रकार प्रक्षेपित किया जाता है कि यह 2 मीटर ऊँचाई की दो समान दीवारें, जोकि परस्पर 4 मीटर की दूरी पर हैं, को ठीक पार कर सकें। एक दीवार से दूसरी दीवार को पार करने में लगा समय है—

(A) $\sqrt{(2/g)}$ (B) $\sqrt{(2g)}$

(C) $2\sqrt{(2/g)}$ (D) $\sqrt{(g/2)}$

113. 600 मीटर/सेकण्ड के वेग से छोड़ी गयी बन्दूक की गोली 12 किग्रा के एक लक्ष्य से टकराती है जो कि टकराने के बाद 1.5 मीटर/सेकण्ड के वेग से चलती है। संघट्ट में गतिज ऊर्जा की प्रतिशत हानि होगी–

(A) 79.75% (B) 89.75%

(C) 99.75% (D) इनमें से कोई नहीं

114. एक मजदूर को मिस्त्री के पास 16 फुट की ऊर्ध्वाधर ऊँचाई पर ईंटें फेंकनी हैं। वह ईंटों को इस प्रकार फेंकता है, कि ईंटें मिस्त्री के पास 16 फुट/सेकण्ड के वेग से पहुँचती हैं। यदि वह ईंटें इस प्रकार फेंके कि ईंटें मिस्त्री के पास तक ही पहुँचें, तब ऊर्जा (energy) का बचाया गया भाग है–

(A) 1/3 (B) 1/4

(C) 1/5 (D) 1/6

115. 20 किमी/घण्टे की चाल से दौड़ते एक व्यक्ति को बारिश की बूँदें ऊर्ध्वाधर से 30° का कोण बनाते हुये गिरती हुई प्रतीत होती हैं। यदि बारिश की बूँदें ऊर्ध्वाधरतः नीचे की ओर गिर रही हैं, तब इनका वेग (किमी/घण्टा में) है—

(A) $10\sqrt{3}$ (B) 10

(C) $20\sqrt{3}$ (D) 40

116. एक पिण्ड सरल रेखा में अचर त्वरण से गति कर रहा है। यह तीसरे तथा चौथे सेकण्ड में क्रमशः 10 मी तथा 12 मी दूरी तय करता है, तब प्रारम्भिक वेग (मीटर/सेकण्ड में) है—

(A) 2 (B) 3

(C) 4 (D) 5

117. एक पतंग, जिसका भार W है, एक डोरी के द्वारा सरल रेखा के अनुदिश उड़ रही है। यदि परिणामी वायु दबाव R का, डोरी के तनाव तथा पतंग के भार से अनुपात क्रमशः $\sqrt{2}$ तथा $(\sqrt{3}+1)$ है, तब—

(A) $T = (\sqrt{6}+\sqrt{2})W$

(B) $R = (\sqrt{3}+1)W$

(C) $T = \frac{1}{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2})W$

(D) $R = (\sqrt{3}-1)W$

118. एक 30 सेमी लम्बी हल्की छड़ 15 सेमी दूरी पर स्थित दो खूँटों पर रखी है। A सिरे से खूँटों (pegs) की दूरी कितनी होनी चाहिये, कि A तथा B से क्रमशः भार 5W तथा 3W लटकाने पर खूँटों के प्रतिक्रिया बल बराबर हो—

(A) 1.75 सेमी, 15.75 सेमी

(B) 2.75 सेमी, 17.75 सेमी

(C) 3.75 सेमी, 18.75 सेमी

(D) उपरोक्त में से कोई नहीं

119. दो बलों $\vec{P}$ तथा $\vec{Q}$ के परिणामी का परिमाण $\vec{P}$ है। यदि बल $\vec{P}$ को दुगुना किया जाये, तब $\vec{Q}$ अपरिवर्तित रहता है, तब नया परिणामी है—

(A) $\vec{P}$ के अनुदिश

(B) $\vec{Q}$ के अनुदिश

(C) $\vec{Q}$ से 60° के कोण पर

(D) $\vec{Q}$ से समकोण पर

120. 12 खिलाड़ियों के किसी समूह से 8 खिलाड़ियों की एक टीम चुनी जाती है। इन आठ खिलाड़ियों में से एक को कप्तान और दूसरे को उपकप्तान चुना जाता है। ऐसा कितने प्रकार से किया जा सकता है?

(A) 27720 (B) 13860

(C) 6930 (D) 495

121. किसी त्रिभुज ABC के शीर्षों A, B तथा C पर तीन समदिश समान्तर बल कार्यरत हैं तथा क्रमशः लम्बाईयों BC, AC तथा AB के समानुपाती हैं, बल का केन्द्र है—

(A) केन्द्रक पर (B) परिकेन्द्र पर

(C) अंतःकेन्द्र पर (D) इनमें से कोई नहीं

122. पाँच बलों वाला एक निकाय, जिसके बलों की दिशायें तथा उनका परिमाण स्वेच्छा से लिये जा सकते हैं, n बलों के संगामी होने पर अवश्य ही असन्तुलन में होगा, जबकि—

(A) $n = 2$ (B) $n = 3$

(C) $n = 4$ (D) $n = 5$

123. 1 टन भार के बॉक्स तथा फर्श के मध्य घर्षण कोण का मान क्या होगा, यदि इस बॉक्स को गति कराने के लिये न्यूनतम 600 किग्रा भार बल आवश्यक है—

(A) 1/4 (B) 3/4

(C) 1/2 (D) 1

124. किसी त्रिभुज के शीर्षों पर रखे तीन बराबर कणों का गुरुत्व केन्द्र है—

(A) अन्तःकेन्द्र (B) गुरुत्व: केन्द्र

(C) परिकेन्द्र (D) लम्बकेन्द्र

125. त्रिज्या a के एक ठोस अर्धगोले पर त्रिज्या a और ऊँचाई a का एक ठोस बेलन रखा है, इस पूरे पिण्ड का गुरुत्व केन्द्र होगा—

(A) बेलन के भीतर

(B) अर्द्ध गोले के भीतर

(C) दोनों के अन्तःपृष्ठ (Interface) पर

(D) दोनों के बाहर

व्याख्यात्मक हल

1. (A) समान्तर षट्फलक का आयतन दिया गया है

$\vec{v} = \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$

$\vec{v} = -2\hat{i} + 3\hat{k}$

$\vec{w} = 7\hat{j} - 4\hat{k}$

अतः $= \vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w}) = [\vec{u}\,\vec{v}\,\vec{w}]$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 0 & 7 & -4 \end{vmatrix}$$

$= 1(0-21) - 2(8-0) - 1(-14-0)$

$= (-21) - 2(8) - 1(-14)$

$= -21 - 16 + 14 = -23$

= 23 घन इकाई

2. (B) दिया है $2\hat{i} + 6\hat{j} - 6\hat{k}$ से होकर गुजरने वाला समतल

$\vec{r}\cdot(2\hat{i} - \hat{j} - 2\hat{k}) = \lambda$

माना $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

अतः $(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}).(2\hat{i} - \hat{j} - 2\hat{k}) = \lambda$

बिन्दु $(-2i + 6\hat{j} - 6\hat{k})$ समतल पर स्थित हैं अतः

$(-2\hat{i} + 6\hat{j} - 6\hat{k})\cdot(2\hat{i} - \hat{j} - 2\hat{k}) = \lambda$

$-4 - 6 + 12 = \lambda = 2$

अतः समतल है $\vec{r}\,.\,(2\hat{i} - \hat{j} - 2\hat{k}) = 2$

3. (C) P_0 (–3, 0, 7) से होकर गुजरने वाला समतल जो $(5\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k})$ के लम्बवत् है इस प्रकार होगा।

$5(x - x_0) + 2(y - y_0) - 1(z - z_0) = 0$

क्रमशः $x_0 = -3,\ y = 0,\ z_0 = 7$

$5(x+3) + 2(y-0) - 1(z-7) = 0$

$5x + 2y - z + 22 = 0$

4. (A) दिया गया है,
$\vec{a} = (1, 1, 1)$
तथा $\vec{c} = (0, 1, -1)$
$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$ माना कि $\vec{b} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$
$\vec{a} \cdot \vec{b} = 10$ यहाँ $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$
$\vec{c} = \hat{j} - \hat{k}$
$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$
अत: $\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$

$\hat{i}(z-y) - \hat{j}(z-x) + \hat{k}(y-x) = 0\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$
$\therefore$ $z - y = 0, x - z = 1, y - x = -1$
$z = y, x - y = 1, x - z = 1$
दिया है, $\vec{a}.\vec{b} = 10$
अत: $(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) = 10$
$x + y + z = 10$
$y + 1 + y + y = 10$
$3y = 9 \Rightarrow y = 3, z = 3$ तथा $x = 4$

5. (D) $\vec{a} = 2x - j + k,\ \vec{b} = i - 3j - 5k,$
$\vec{c} = 3i - 4j - 4k$
माना $\vec{b}$ और $\vec{c}$ के बीच कोण = A
अत:
$\vec{b}.\vec{c} = |\vec{b}||\vec{c}| \cos A$
इसी प्रकार माना
$\vec{a}$ और $\vec{c}$ के बीच कोण का मान = B
$\cos A = \dfrac{\vec{b}.\vec{c}}{|\vec{b}||\vec{c}|}$
$= \dfrac{3 + 12 + 20}{\sqrt{1+9+25} \times \sqrt{9+16+16}}$
$= \dfrac{35}{\sqrt{35} \times \sqrt{41}} = \dfrac{\sqrt{35}}{\sqrt{41}}$
$\cos B = \dfrac{\vec{a}.\vec{c}}{|\vec{a}||\vec{c}|}$
$= \dfrac{6 + 4 - 4}{\sqrt{4+1+1} \times \sqrt{9+16+16}}$
$= \dfrac{6}{\sqrt{6} \times \sqrt{41}} = \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{41}}$
$\vec{a}$ और $\vec{b}$ के बीच कोण = C
$\cos C = \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = 2 + 3 - 5$
$= \dfrac{0}{|\vec{a}||\vec{b}|} = 0$

6. (B) दिया है
$(e^y + 1) \cos x\, dx + e^y \sin x\, dy = 0$
इस समीकरण को $(e^y + 1)$ से भाग करने पर
$\cos x\, dx + \dfrac{e^y}{(e^y+1)} \sin x\, dx = 0$
इस समीकरण को $\sin x$ से भाग करने पर
$\Rightarrow \dfrac{\cos x}{\sin x} dx + \dfrac{e^y}{e^y+1} dy = 0$
$\cot x\, dx + \dfrac{e^y}{e^y+1} dy = 0$
समाकलन करने पर,
$\int \cot x dx + \int \dfrac{e^y}{e^y+1} dy = 0$
$\Rightarrow \log(\sin x) + \log(e^y + 1) = \log C$
$\Rightarrow \log \sin x(e^y + 1) = \log C$
$\Rightarrow \sin x(e^y + 1) = C$

7. (D) हमें दिया है
$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{y^2 + \sin y}$
$\Rightarrow \dfrac{dx}{dy} = y^2 + \sin y$
$\Rightarrow dx = (y^2 + \sin y)\, dy$
दोनों ओर समाकलन करने पर हमें प्राप्त होता है।
$\int dx = \int (y^2 + \sin y) dy$
$\Rightarrow x = \dfrac{y^3}{3} - \cos y + C$

8. (C) अभीष्ट समीकरण :
x^2–(मूलों का योगफल) x + मूलों का गुणनफल = 0
$x^2 - \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3}\right)x + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{3} = 0$
$\Rightarrow x^2 - \dfrac{5}{6}x + \dfrac{1}{6} = 0$
$\therefore 6x^2 - 5x + 1 = 0$

9. (B) हमें दिया है
$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{x^2+1}$
$\Rightarrow dy = \dfrac{x}{x^2+1} dx$
दोनों ओर समाकलन करने पर प्राप्त होता है।
$\int dy = \int \dfrac{x}{x^2+1} dx$
$\Rightarrow \int dy = \dfrac{1}{2} \int \dfrac{2x}{x^2+1} dx$
$t = x^2 + 1 \Rightarrow dt = 2x\, dx$
$\Rightarrow \int dy = \dfrac{1}{2} \int \dfrac{dt}{t}$
$\Rightarrow y = \dfrac{1}{2} \log(x^2 + 1) + C$

10. (B) $x\dfrac{dy}{dx} + my = e^{-x}$
$\Rightarrow \dfrac{dy}{dx} + \dfrac{m}{x} y = \dfrac{e^{-x}}{x}$
समीकरण की तुलना $\dfrac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ से करने पर
$P(x) = \dfrac{m}{x}$
I.F. $= e^{\int \frac{m}{x} dx}$
$= e^{m \log x} = x^m = \dfrac{1}{x^2}$
$x^m = x^{-2}$ यदि $m = -2$

11. (C) दिया है, $(1 - x^2)\dfrac{dy}{dx} - xy = 1$
समीकरण को $(1 - x^2)$ से दोनों ओर भाग करने पर
$\dfrac{dy}{dx} - \left(\dfrac{x}{1-x^2}\right)y = \dfrac{1}{1-x^2}$
समीकरण की तुलना
$\dfrac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$
से करने पर
$P(x) = -\left(\dfrac{x}{1-x^2}\right)$
$\therefore$ समाकलन गुणांक (I.F.)
$= e^{\int \frac{-x}{1-x^2} dx}$
माना $t = 1 - x^2$
तब, $dt = -2x\, dx$
$e^{\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t}} = e^{\frac{1}{2}\log(1-x^2)}$
$= e^{\log_e \sqrt{1-x^2}}$
$= \sqrt{1-x^2}$

12. (B) $(1 + i)^5 \left(1 + \dfrac{1}{i}\right)^5$
$\Rightarrow (1 + i)^5 \left(\dfrac{i+1}{i}\right)^5$
$\Rightarrow \dfrac{(1+i)^5 (1+i)^5}{i^5}$

$= \frac{[(1+i)^2]^5}{1\times i}$

$\Rightarrow \frac{(1+i^2+2i)^5}{i}$

$\Rightarrow \frac{(1-1+2i)^5}{i}$

$\Rightarrow \frac{2^5\times i^5}{i}$

$\Rightarrow \frac{2^5\times i^4\times i}{i}$

$\Rightarrow 2^5 = 32$

13. (A) दिया है, $(p+q)$वाँ पद

$= ar^{p+q-1} = m$ ...(i)

$(p-q)$वाँ पद $= ar^{p-q-1} = n$ ...(ii)

समीकरण (i) व (ii) को गुणा करने पर,

$\Rightarrow ar^{p+q-1} \times ar^{p-q-1} = mn$

$\Rightarrow a^2r^{2(p-1)} = mn$

$\Rightarrow ar^{p-1} = (mn)^{1/2}$

$a = \frac{\sqrt{(mn)}}{r^{p-1}}$

$\therefore$ p वाँ पद $= ar^{p-1}$

$= \frac{\sqrt{mn}}{r^{p-1}}.r^{p-1}$

$= \sqrt{mn}$

14. (C) चूँकि A और B घटनाएँ एक-दूसरे के स्वतंत्र हैं।

$\therefore$ P(A + B) = एक ही सूट के दोनों पत्तों की आने की प्रायिकता $\times$ पाँसे पर 6 आने की प्रायिकता

$= \frac{1}{4}\times\frac{5}{36} = \frac{5}{144}$

15. (A) परस्पर अपवर्जी घटना A और B के लिए

$P(A\cap B) = 0$

$\Rightarrow P(A\cup B) = P(A) + P(B)$

16. (A) यहाँ $T_n = \frac{1^2+2^2+3^2+.....n^2}{n!}$

$= \frac{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}{n!}$

$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n!} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6(n-1)!}$

$= \frac{(n-1).(2n+1)+2(2n+1)}{6.(n-1)!}$

$= \frac{(2n+1)}{6(n-2)!} + \frac{2(2n+1)}{6.(n-1)!}$

$= \frac{2(n-2)+5}{6.(n-2)!} + \frac{2(n-1)+3}{3.(n-1)!}$

$= \frac{1}{3(n-3)!} + \frac{5}{6.(n-2)!} + \frac{2}{3(n-2)!} + \frac{1}{(n-1)!}$

$= \frac{1}{3(n-3)!} + \frac{3}{2.(n-2)!} + \frac{1}{(n-2)!}$

$n = 1, 2, 3$.........रखने पर

$T_1 = \frac{1}{3}(0) + \frac{3}{2}(0) + \frac{1}{0!}$

$T_2 = \frac{1}{3}(0) + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{0!}\right) + \frac{1}{1!}$

$T_3 = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{0!}\right) + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{1!}\right) + \frac{1}{2!}$

T_1, T_2 तथा T_3 को स्तम्भानुसार जोड़ने पर श्रेणी का योगफल

$= \frac{1}{3}\left[1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+......\right] + \frac{3}{2}$

$\left[1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2}+.......\right] +$

$\left[1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+.....\right]$

[हम जानते हैं।

$e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...$

$x = 1$ रखने पर,

$e = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+.......]$

$= \frac{1}{3}(e) + \frac{3}{2}e + (e) = \frac{17e}{6}$

17. (D) दिया है,

ΔABC में $b = 22, c = 24$

और ΔABC के कोण समान्तर श्रेणी में है।

$\angle A = x-d, \angle B = x, \angle C = x+d$

तब $\angle A + \angle B + \angle C = 3x = 180^\circ$

$\Rightarrow x = 60^\circ$

$\Rightarrow \angle B = 60^\circ$

अत: सूत्र द्वारा,

$\cos B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$

$\Rightarrow \cos 60^\circ = \frac{a^2+576-484}{2\times a\times 24}$

$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{a^2+92}{48a}$

$\Rightarrow (a^2+92) = \frac{48a}{2}$

$\Rightarrow a^2 - 24a + 92 = 0$

श्रीधराचार्य के नियम से,

$a = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$a = \frac{24\pm\sqrt{576-368}}{2}$

$= \frac{24\pm\sqrt{208}}{2}$

$= 12\pm 2\sqrt{13}$

18. (D) माना कि

$S = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}[(n+1)(n+2)......(n+n)]^{1/n}$

$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{\frac{1}{n}}....\left(1+\frac{n}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$

अत: $\log S = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\log\left(1+\frac{1}{n}\right)+\log\left(1+\frac{2}{n}\right)\right]$

$....+\log\left(1+\frac{n}{n}\right)$

$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\sum_{r=1}^{n}\log\left(1+\frac{r}{n}\right)\right]$

$= \int_0^1\log(1+x)dx$

ILATE के नियम से

$= [\log(1+x)x]_0^1 - \int_0^1\frac{1}{1+x}x.dx$

$= \log 2 - \int_0^1\frac{1+x-1}{1+x}dx$

$= \log 2 + [x]_0^1 + [\log(1+x)]_0^1$

$= \log 2 - 1 + \log 2$

$= 2\log 2 - 1$

$= 2\log 2 - \log e$

$= \log 4 - \log e$

$\log S = \log(4/e)$

अत: $S = \frac{4}{e}$

19. (A) ज्ञात करना है $\int\tan^{-1}\sqrt{x}\,dx$

माना कि $\sqrt{x} = t$ अत: $x = t^2$,

$dx = 2t.\,dt$

तब $\int\tan^{-1}\sqrt{x}.dx = \int\tan^{-1}t.2t.\,dt$

$= \int 2\tan^{-1}t\cdot t\,dt$

ILATE के नियम से

$= 2\tan^{-1}t\frac{t^2}{2} - 2\times\int\frac{1}{1+t^2}.\frac{t^2}{2}dt$

$= t^2 \tan^{-1}t - \int \frac{t^2}{1+t^2}dt$

$= t^2 \tan^{-1}t - \int \frac{1+t^2-1}{1+t^2}dt$

$= t^2 \tan^{-1}t - \int dt + \int \frac{dt}{1+t^2}$

$= t^2 \tan^{-1} t - t + \tan^{-1} t + c$

$= (t^2+1)\tan^{-1} t - t + c$

t का मान रखने पर

$= (x+1)\tan^{-1}\sqrt{x} - \sqrt{x} + c$

20. (C) दिया है, $\int \frac{\sin x.\cos x}{1+\sin^4 x}.dx$

माना कि $\sin^2 x = t$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$2\sin x.\cos x dx = dt$

अतः $\frac{1}{2}\int \frac{1}{1+t^2}dt = \frac{1}{2}\tan^{-1}t + c$

$= \frac{1}{2}\tan^{-1}(\sin^2 x) + c$

21. (C) $\int_{-1/2}^{1/2}\left[\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 + \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 - 2\right]^{1/2} dx$

$\int_{-1/2}^{1/2} f(x)dx$ को सरल करके लिखने पर

$\int_{-1/2}^{1/2}\left[\left(\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1}\right)^2\right]^{1/2} dx$

$= \int_{-1/2}^{1/2}\left|\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1}\right| dx$

$= \int_{-1/2}^{1/2}\left|\frac{(x+1)^2-(x-1)^2}{(x^2-1)}\right| dx$

$= \int_{-1/2}^{1/2}\left|\frac{4x}{x^2-1}\right| dx$

$= 2\int_0^{1/2}\left|\frac{4x}{x^2-1}\right| dx$

$= 2\int_0^{1/2}\left(\frac{-4x}{x^2-1}\right) dx$

$= 8\int_0^{1/2}\frac{x}{1-x^2}dx$

माना $t = 1-x^2,\ dt = -2x\,dx$

$\frac{-1}{2}dt = x\,dx \Rightarrow \frac{-8}{2}\int_0^{1/2}\frac{dt}{t}$

$= \frac{-8}{2}\log[(1^2-x^2)]_0^{1/2}$

$= -4\left[\log\left(1-\frac{1}{4}\right) - \log 1\right]$

$= -4\left(\log\frac{3}{4} - 0\right) = -4\log\frac{3}{4} = 4\log\frac{4}{3}$

22. (D) ज्ञात करना है

$\sin^{-1}x$ का $\cos^{-1}\sqrt{1-x^2}$ के सापेक्ष अवकलन

$\because \cos^{-1}\sqrt{1-x^2} = \sin^{-1}x$

अतः $\sin^{-1}x$ का $\sin^{-1}x$ के सापेक्ष अवकलन

$\frac{d(\sin^{-1}x)}{\sin^{-1}x} = 1$

23. (D) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}dx$ ...(i)

$\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx$ से,

$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}}{\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}+\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}}dx$

$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}dx$ ...(ii)

समीकरण (i) तथा (ii) को जोड़ने पर

$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx$

$2I = [x]_0^{\pi/2}$

$\Rightarrow 2I = \frac{\pi}{2}$

$I = \frac{\pi}{4}$

24. (B) माना $f(x) = x^3$ तथा $g(x) = x^2$

$f(x)$ को $g(x)$ के सापेक्ष अवकलन करने के लिए

$\frac{df(x)}{dg(x)}$ को ज्ञात करना है।

अब, $\frac{df(x)}{dx} = 3x^2$

तथा $\frac{dg(x)}{dx} = 2x$

x^2 के सापेक्ष x^3 का अवकलन करने पर,

$\frac{df(x)}{dg(x)} = \left\{\frac{df(x)}{dx}\right\} \times \left\{\frac{dx}{dg(x)}\right\}$

$= 3x^2 \times \frac{1}{2x} = \frac{3x}{2}$

25. (B) दिया है, वक्र $y = x^x$

दोनों पक्षों का लघुगणक लेने पर,

$\log y = x\log x$

दोनों ओर x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = x\frac{1}{x} + \log x.1$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = y(1+\log x)$

$= x^x(1+\log x)$

$(\because y = x^x)$

$\therefore \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=1} = (1)^1(1+\log 1)$

$= 1(1+0) = 1$

26. (C) माना एक संख्या $= x$

तब दूसरी संख्या $= (16-x)$

$S = x^3 + (16-x)^3$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$\frac{dS}{dx} = 3x^2 + 3(16-x)^2(-1)$

$= 3x^2 - 3(16-x)^2$

$\Rightarrow \frac{d^2S}{dx^2} = 6x + 6(16-x) = 96$

न्यूनतम मान के लिए $\frac{dS}{dx} = 0$ रखने पर,

$3x^2 - 3(16-x)^2 = 0$

$\Rightarrow x^2 - (256 + x^2 - 32x) = 0$

$\Rightarrow 32x = 256$

$\Rightarrow x = 8$

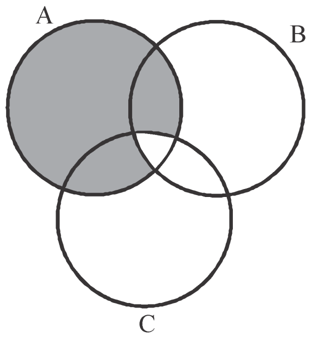
$x = 8$ पर, $\left(\frac{d^2S}{dx^2}\right)_{x=8} = 96 > 0$

$\therefore$ द्वितीय अवकलन परीक्षण द्वारा $x = 8$, S का स्थानीय न्यूनतम मान है। संख्याओं के घनों का योग निम्नतम होगा जब संख्या 8 और $(16-8) = 8$ होगी।

अतः आवश्यक संख्याएँ 8 और 8 हैं।

27. (D) वेन आरेख से स्पष्ट है

कि $(A-B)\cup(A-C) = A-(B\cap C)$



28. (C) शब्द VOWELS, 6 अक्षरों से बना है पहले स्थान पर E रखने के बाद शेष 5 अक्षरों को 5! तरीके से लिखा जा सकता है।

अत: अभीष्ट तरीके = 1 ×5! = 120

29. (B) दिया है $\quad {}^nP_r = 120 \cdot {}^nC_r$

$$\frac{n!}{(n-r)!} = 120 \cdot \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$$1 = \frac{120}{r!}$$

$$r! = 120$$

$$r! = 5.4.3.2.1$$

$$r! = 5!$$

$$\Rightarrow \quad r = 5$$

30. (C)

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2^2}{n^2}\right)\left(+\frac{3^2}{n^2}\right)....\left(1+\frac{n^2}{n^2}\right)\right]^{1/n}$$

माना

$$S = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2^2}{n^2}\right)\left(1+\frac{3^2}{n^3}\right)...\left(1+\frac{n^2}{n^2}\right)\right]^{1/n}$$

दोनों ओर log लेने पर,

$$\log S = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2^2}{n^2}\right)...\left(1+\frac{n^2}{n^2}\right)\right]$$

$$\log S = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\sum_{r=1}^{1}\log\left(1+\frac{r^2}{n^2}\right)\right]$$

$$\log S = \int_0^1 \log(1+x^2)dx$$

$$\log S = \left[\log(1+x^2)x\right]_0^1 - \int\frac{2x\times x}{1+x^2}dx$$

$$\log S = \log 2 - 2\int_0^1\frac{x^2+1-1}{1+x^2}dx$$

$$\log S = \log 2 - 2\int_0^1 dx + 2\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}$$

$$\log S = \log 2 - 2[x]_0^1 + 2\tan^{-1}|x|_0^1$$

$$\log S = \log 2 - 2 + 2\tan^{-1}(1)$$

$$\log S = \log 2 - 2 + 2\tan^{-1}\left(\tan\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\log S = \log 2 - 2 + 2\times\frac{\pi}{4}$$

$$S = e^{\log 2}\times e^{\frac{\pi}{2}-2}$$

$$S = 2\times e^{\frac{\pi-4}{2}} = 2e^{\frac{\pi-4}{2}}$$

31. (C) दिया गया है

$$f(x) = \begin{cases}(3ax+b) \text{ यदि } x>1\\ (11) \quad \text{ यदि } x=1\\ (5ax-2b) \text{ यदि } x<1\end{cases}$$

अत: फलन $x = 1$ पर सतत है, अत:

$$\text{LHD} = \lim_{x\to1^-}f(x) = \lim_{x\to1^-}(5a(x-h)-2b)$$

$$= 5a \times 1 - 2b = 5a - 2b$$

$$\text{RHD} = \lim_{x\to1^+}f(x) = \lim_{x\to1^+}(3a(x+h)+b)$$

$$= 3a \times 1 + b = 3a + b$$

तथा $\quad f(1) = 11$

$$\text{LHD} = \text{RHD} = f(1)$$

$$5a - 2b = 11 \quad ...(1)$$

$$3a + b = 11 \quad ...(2)$$

समी. (1) तथा (2) को हल करने पर

$a = 3$ व $b = 2$

32. (D) 1, 2, 3, 4, 5, 6दिये गए 6 अंकों से 4 अंकों की संख्या बनाने के अभीष्ट प्रकार = ${}^6P_4$

$= 6 \times 5 \times 4 \times 3$

$= 360$

33. (A) माना $y = \sin^p x \cos^q x$

$$\frac{dy}{dx} = \sin^p x \cdot q\cos^{q-1}x(-\sin x) + \cos^q x \cdot p\sin^{p-1}x\,(\cos x)$$

$$= \sin^{p-1}x\cos^{q-1}x(-q\sin^2 x + p\cos^2 x)$$

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow p\cos^2 x - q\sin^2 x = 0$$

तथा $\quad \sin^{p-1}x = 0$

$x = 0$

$\cos^{q-1}x = 0$

$$x = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \tan^2 x = \frac{p}{q} \Rightarrow \tan x = \sqrt{p/q}$$

$$\Rightarrow \quad x = 0, \frac{\pi}{2} \Rightarrow \tan^{-1} = \sqrt{p/q}$$

पुन: $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{\sin x\cos x}[p\cos^2 x - q\sin^2 x]$

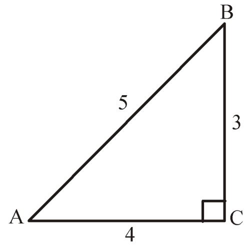
$$= y[p\cot x - q\tan x]$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{dx}[p\cot x - q\tan x] + y$$

$$[-b\,\text{cosec}^2 x - q\sec^2 x] < 0,$$

$x = \tan^{-1}\sqrt{p/q}$ के लिए

34. (C) $\tan\left[\cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right]$



$$\cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$$

$$= \tan\left[\tan^{-1}\frac{3}{4} + \tan^{-1}\frac{2}{3}\right]$$

$$= \tan\cdot\left[\tan^{-1}\left(\frac{\frac{3}{4}+\frac{2}{3}}{1+\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}}\right)\right]$$

$$= \tan\cdot\left[\tan^{-1}\left(\frac{17}{6}\right)\right] = \frac{17}{6}$$

35. (B) $\frac{A-B+C}{2} = \frac{A+B+C-2B}{2}$

$$= \frac{\pi-2B}{2} = \frac{\pi}{2} - B$$

$\therefore \quad A + B + C = \pi$

$$\therefore\ 2ac\sin\left(\frac{A-B+C}{2}\right) = 2ac\sin\left(\frac{\pi}{2}-B\right)$$

$$= 2ac\cos B = a^2 + c^2 - b^2$$

$$\left[\therefore \cos B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\right]$$

36. (A) दिया है,

$$\sin^{-1}x + \sin^{-1}2x = \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \quad \sin^{-1}x + \sin^{-1}2x = \sin^{-1}\left(\sqrt{3}/2\right)$$

$$\Rightarrow \quad \sin^{-1}x - \sin^{-1}\left(\sqrt{3}/2\right) = \sin^{-1}2x$$

$$\Rightarrow \quad \sin^{-1}\left[x\sqrt{\left(1-\frac{3}{4}\right)} - \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1-x^2}\right] = \sin^{-1}2x$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1-x^2} = -2x$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{2} + 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1-x^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{5x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1-x^2}$$

$$\Rightarrow \quad 5x = \sqrt{3}\sqrt{1-x^2}$$

दोनों ओर वर्ग करने पर,

$\Rightarrow \quad 25x^2 = 3(1-x^2)$

$\Rightarrow \quad = 3 - 3x^2$

$\Rightarrow \quad 28x^2 = 3$

$$\therefore \quad x^2 = \frac{3}{28} \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$$

37. (B) दिया है $x_n = (\cos \pi/3^n) + i\sin(\pi/3^n)$

$x_1 x_2 x_3 \ldots, \infty$

$$= \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\left(\cos\frac{\pi}{3^2} + i\sin\frac{\pi}{3^2}\right)$$

$$\left(\cos\frac{\pi}{3^2} + i\sin\frac{\pi}{3^3}\right)\ldots$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3^2} + \frac{\pi}{3^3} + \ldots\right) + i\sin$$

$$\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3^2} + \frac{\pi}{3^3} + \ldots\right)$$

$\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3^2}, \frac{\pi}{3^3}\right.$ एक गुणोत्तर श्रेणी में है जिसमें

$$\left. a = \frac{\pi}{3}, r = \frac{1}{3}\right]$$

$$= \cos\left(\frac{\pi/3}{1-1/3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi/3}{1-1/3}\right)$$

$$= \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$$

$$= 0 + i \times 1 = i$$

38. (A) दिया है $\tan\theta + \sin\theta = m$

और $\tan\theta - \sin\theta = n$

$m^2 - n^2 = (m+n)(m-n)$

$= (\tan\theta + \sin\theta + \tan\theta - \sin\theta)$

$(\tan\theta + \sin\theta - \tan\theta + \sin\theta)$

$= 2\tan\theta \times 2\sin\theta = 4\sin\theta \times \tan\theta$

$$mn = \tan^2\theta - \sin^2\theta = \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} - \sin^2\theta$$

$$= \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}(1-\cos^2\theta) = \tan^2\theta\sin^2\theta$$

$$\sqrt{mn} = \tan\theta.\sin\theta$$

$$\therefore \quad m^2 - n^2 = 4\sin\theta.\tan\theta = 4 \times \sqrt{mn}$$

39. (D) दी गई रेखा का समीकरण

$x\sec\theta + y\,\text{cosec}\theta = a$

$$\Rightarrow \frac{x}{\cos\theta} + \frac{y}{\sin\theta} = a$$

$\Rightarrow x\sin\theta + y\cos\theta = a\sin\theta\cos\theta$ ...(i)

समी. (i) पर लम्ब रेखा का समीकरण

$x\cos\theta - y\sin\theta = \lambda$ ...(ii)

$\because$ रेखा बिन्दु $(a\cos^3\theta, a\sin^3\theta)$ से होकर जाती है।

समी. (ii) में मान रखने पर,

$a\cos^3\theta \times \cos\theta - a\sin^3\theta\sin\theta = \lambda$

$\therefore \quad a\cos^4\theta - a\sin^4\theta = \lambda$

$a(\cos^2\theta - \sin^2\theta)\times(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = \lambda$

$\Rightarrow \quad a\cos 2\theta = \lambda$

λ का मान समी. (ii) में रखने पर,

अतः $x\cos\theta - y\sin\theta = a\cos 2\theta$

40. (B) $\tan\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right)\tan\left(\frac{3\pi}{4} + \theta\right)$

हम जानते हैं।

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A\tan B}$$

अतः

$$\left(\frac{\tan\frac{\pi}{4} + \tan\theta}{1 - \tan\frac{\pi}{4}\tan\theta}\right) \times \left(\frac{\tan\frac{3\pi}{4} + \tan\theta}{1 - \tan\frac{3\pi}{4}\tan\theta}\right)$$

$$= \left(\frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}\right)\times\left(\frac{-1+\tan\theta}{1+\tan\theta}\right)$$

$$= -\left(\frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}\right)\times\left(\frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}\right) = -1$$

41. (A) $\tan(3A - 2A) = \dfrac{\tan 3A - \tan 2A}{1 + \tan 2A\tan 3A}$

$\Rightarrow \quad \tan A(1 + \tan 2A\tan 3A)$

$= \tan 3A - \tan 2A$

$\Rightarrow \quad \tan A + \tan A\tan 2A\tan 3A$

$= \tan 3A - \tan 2A$

$\Rightarrow \quad \tan A\tan 2A\tan 3A$

$= \tan 3A - \tan 2A - \tan A$

42. (B) दिया है $3\cos x = 5\sin x$

$$\Rightarrow \quad \tan x = \frac{3}{5}$$

अतः $\dfrac{5\sin x - 2\sec^3 x + 2\cos x}{5\sin x + 2\sec^3 x - 2\cos x}$

$\cos x$ से भाग देने पर,

$$= \frac{\frac{5\sin x}{\cos x} - 2\sec^4 x + 2}{\frac{5\sin x}{\cos x} + 2\sec^4 x - 2}$$

तथा $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$

$$= \frac{5\tan x - 2(1+\tan^2 x)^2 + 2}{5\tan x + 2(1+\tan^2 x)^2 - 2}$$

$$= \frac{5\times\frac{3}{5} - 2\left(1 + \frac{9}{25}\right)^2 + 2}{5\times\frac{3}{5} + 2\left(1 + \frac{9}{25}\right)^2 - 2}$$

$$= \frac{813}{2937} = \frac{271}{979}$$

43. (A) $3 + 4i$ का वर्गमूल ज्ञात करने के लिए

माना, $x + iy = \sqrt{3+4i}$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर,

$(x+iy)^2 = 3 + 4i$

$\Rightarrow \quad x^2 - y^2 + 2xyi = 3 + 4i$

$(i^2 = -1)$

दोनों पक्षों में वास्तविक तथा काल्पनिक भागों की तुलना करने पर,

$x^2 - y^2 = 3$ ....(i)

तथा $2xy = 4$ ....(ii)

अब, हम निम्न सर्वसमिका का उपयोग करते हैं।

$(x^2 + y^2)^2 = (x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2$

$\Rightarrow \quad (x^2+y^2)^2 = (3)^2 + (4)^2$

$= 9 + 18 = 25$

$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 = 5$ ....(iii)

समीकरण (i) तथा (ii) से,

$x^2 = 4$ तथा $y^2 = 1$

$\Rightarrow x \pm 2$ तथा $y = \pm 1$

चूँकि xy का गुणनफल धनात्मक है।

$\therefore \quad x = 2$ तथा $y = 1$

$\Rightarrow \quad x = -2$ तथा $y = -1$

अतः सम्मिश्र संख्या $3 + 4i$ का वर्गमूल $\pm(2+i)$ है।

44. (D) $\because y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$

y के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 6x - 9$$

स्पर्श रेखा x–अक्ष के समान्तर है।

$\therefore$ M = 0

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 0$$

$\Rightarrow \quad 3x^2 - 6x - 9 = 0$

$\Rightarrow \quad (x+1)(x-3) = 0$

$\Rightarrow \quad x = -1, 3$

45. (D) दिया है। $A + B = \dfrac{\pi}{4}$

$$\text{अतः } \tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A\tan B}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A\tan B}$$

$1 - \tan A\tan B = \tan A + \tan B$

tan A + tan B + tan A tan B = 1 ...(i)

ज्ञात करना है। (1 + tan A) (1 + tan B)

1 + tanA + tan B + tan A tan B

अत: समीकरण (i) से

$= 1 + 1 = 2$

46. (A) दिया है $p = \sec\theta + \tan\theta$

$$\frac{p^2-1}{p^2+1} = \frac{(\sec\theta+\tan\theta)^2-1}{(\sec\theta+\tan\theta)^2+1}$$

$$= \frac{\sec^2\theta+\tan^2\theta+2\sec\theta.\tan\theta-1}{\sec^2\theta+\tan^2\theta+2\sec\theta.\tan\theta+1}$$

$$= \frac{(\sec^2\theta-1)+\tan^2\theta+2\sec\theta.\tan\theta}{\sec^2\theta+2\tan\theta\sec\theta+1.(1+\tan^2\theta)}$$

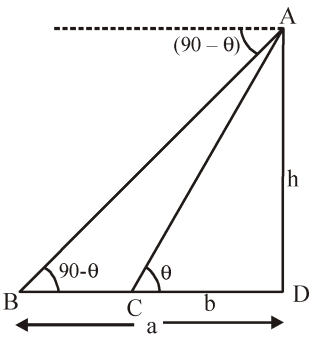
$$= \frac{\tan^2\theta+\tan^2\theta+2\sec\theta.\tan\theta}{\sec^2\theta+2\sec\theta.\tan\theta+\sec^2\theta}$$

$$= \frac{2\tan^2\theta+2\sec\theta.\tan\theta}{2\sec^2\theta+2\sec\theta.\tan\theta}$$

$$= \frac{2\tan\theta(\tan\theta+\sec\theta)}{2\sec\theta(\sec\theta+\tan\theta)}$$

$$= \frac{\tan\theta}{\sec\theta} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta.\sec\theta} = \sin\theta$$

47. (A) माना कि AD एक मीनार है तथा B व C से मीनार के शीर्ष के उन्नयन कोण $(90^\circ - \theta)$ तथा θ हैं।



ΔACD में, $\tan\theta = \frac{h}{b}$

$\Rightarrow$ $h = b\tan\theta$ ...(i)

Δ ABD में,

$$\tan(90-\theta) = \frac{h}{a}$$

$$\cot\theta = \frac{h}{a}$$

$$\frac{1}{\tan\theta} = \frac{h}{a}$$

$\Rightarrow$ $\tan\theta = \frac{a}{h}$ ...(ii)

समी. (i) व (ii) से,

$$h = b\left(\frac{a}{h}\right), h^2 = ab$$

$$h = \sqrt{ab}$$

48. (B) दिया है, A = {3, 4, 7, 8},

B = {1, 5, 6, 4, 3},

C = {4, 5, 9, 3, 8, 6}

अब, $A \cup B$

$= \{3, 4, 7, 8\} \cup \{1, 5, 6, 4, 3\}$

$= \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

$\therefore$ $(A \cup B) \cap C$

$= \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \cap \{4, 5, 9, 3, 8, 6\}$

$= \{3, 4, 5, 6, 8\}$

49. (D)

संख्या x	बारम्बारता f	$f.x$
4	$x+2$	$4x+8$
6	x	$6x$
8	$x-1$	$8x-8$
	$\Sigma f.x = 3x+1$	

माध्य $\bar{x} = \frac{\Sigma f.x}{\Sigma f}$

$\Rightarrow$ $5.78 = \frac{18x}{3x+1}$

$3x + 1 = 3.11x$

$x = 8.77$

50. (B)

वर्ग अन्तराल	f_i	x_i	f_ix_i	$\lvert\bar{x}-x_i\rvert$	$f\lvert x-\bar{x}\rvert$
25-29	5	27	135	5.7	28.5
30-34	4	32	128	0.7	2.8
35-39	3	37	111	4.3	12.9
40-44	2	42	84	9.3	18.6
	$\Sigma f = 14$	$\Sigma f_ix_i = 458$			62.8

माध्य $\bar{x} = \frac{\Sigma f_ix_i}{\Sigma f_i}$

$\bar{x} = \frac{458}{14}$

$\bar{x} = 32.714$

माध्य विचलन $= \frac{\Sigma f\,|x-\bar{x}|}{\Sigma f}$

$= \frac{62.8}{14} = 4.48$

51. (B)

वजन	बारम्बारता	संचयी बारम्बारता
31	2	2
34	3	5
35	4	9
36	5	14
37	1	15
	$n = 15$	

$n = 15$ पदों की संख्या विषम है।

$\therefore$ माध्यिका $= \left(\frac{n+1}{2}\right)$वाँ पद

माध्यिका $= \left(\frac{15+1}{2}\right) = 8$वाँ पद

8 वाँ पद संचयी बारम्बारता 9 में है।

$\therefore$ माध्यिका = 35 किग्रा

52. (A) दिया है,

$$\bar{x} = \frac{x_1+x_2+x_3+....+x_n}{n}$$

$n\bar{x} = x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n$ ...(i)

अब $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) = [(x_1 - \bar{x}) +$

$(x_2 - \bar{x}) + (x_3 - \bar{x})$

$+ (x_n - \bar{x})]$

$= (x_1 + x_2 + x_3 + ...+ x_n)$

$- (\bar{x} + \bar{x} + \bar{x} + ...n$ बार)

$= n\bar{x} - n\bar{x}$ [समीकरण (i) से]

$= 0$

53. (D) माना P और Q के बीच का कोण $= \alpha$

यदि P तथा Q बलों का परिणामी R, बल P के बराबर है, तो

$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha$ से

$P^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha$

$\Rightarrow$ $Q^2 + 2PQ\cos\alpha = 0$

$\Rightarrow$ $Q(Q + 2P\cos\alpha) = 0$

$\therefore$ बल Q, शून्य के बराबर नहीं है,

$\therefore$ $Q + 2P\cos\alpha = 0$ ...(i)

अब यदि बल P, दोगुना हो जाता है, अतएव यदि बल 2P और Q हो जाते है, तो माना इन बलों का परिणामी बल Q से θ कोण बनाता है।

अर्थात् दो बल 2P तथा Q है।

$\tan\theta = \frac{Q\sin\alpha}{P + Q\cos\alpha}$ से

$\tan\theta = \frac{2P\cos\alpha}{Q + 2P\cos\alpha}$

$\Rightarrow$ $\tan\theta = \frac{2P\cos\alpha}{0} = \infty$

$\Rightarrow$ $\tan\theta = \tan 90^\circ$

$\therefore$ $\theta = 90^\circ$

54. (B) माना पत्थर h ऊँचाई से गिराया जाता है।

$\therefore$ $s = ut + \frac{1}{2}ft^2$ से

$h = 0 + \frac{1}{2}g \times 25,$

$h = \frac{25}{2}g$

3 सेकण्ड में गिरी दूरी

$$s_1 = \frac{1}{2}g \times 9 = \frac{9}{2}g$$

शेष बची दूरी $= \frac{25}{2}g - \frac{9}{2}g = \frac{16}{2}g = 8g$

अत: मान लो समय t लगता है, तब

$$8g = \frac{1}{2}gt^2$$

$\therefore \quad t^2 = 16 \Rightarrow t = 4$ सेकण्ड

55. (D) दिया गया है भार $(m) = 300$ किग्रा.

गहराई $(h) = 100$ मीटर

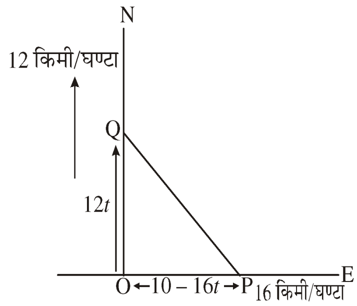
गुरुत्वीय त्वरण $g = 9.8$

इंजन की अश्वशक्ति $= \frac{mgh}{746}$

$$= \frac{300 \times 9.8 \times 100}{746}$$

$$= \frac{294 \times 1000}{746} = 394$$

56. (C)



दिया है, उत्तर दिशा में जाने वाले जहाज का वेग = 12 किमी./घण्टा

पश्चिम दिशा की ओर जाने वाले जहाज का वेग = 16 किमी./घण्टा

माना कि जहाजों की स्थिति t घण्टे बाद P और Q पर है तो

$OP = 10 - 16t, \; OQ = 12t$

$PQ^2 = (10 - 16t)^2 + (12t)^2$

$= 100 + 256t^2 - 320t + 144t^2$

$= 100 - 320t + 400t^2$

PQ के न्यूनतम मान के लिए

$$\frac{d}{dt}PQ^2 = 0$$

$\therefore 320 - 800t = 0$

$800t = 320$

$t = \frac{320}{800} = \frac{2}{5}$ घण्टे

$\therefore$ न्यूनतम PQ

$$= \sqrt{\left(10 - 16 \times \frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{12 \times 2}{5}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left[\frac{50 - 32}{5}\right]^2 + \left(\frac{24}{5}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{18^2 + 24^2}{5^2}} = \frac{30}{5} = 6 \text{ किमी}$$

57. (B) हम जानते हैं कि सामान्य रज्जू की P की कोटि y, रज्जू की परिमाप C तथा रज्जू की प्रति इकाई लम्बाई का भार ω हो तो

$$T_0 = \omega c,$$
$$T = \omega y$$

तथा $W = s\omega$

$\therefore \quad T^2 - T_0^2 = \omega^2 y^2 - \omega^2 c^2$

$= \omega^2 (y^2 - c^2)$

$= \omega^2 s^2 = W^2$

58. (D) माना $z = x + iy$, तब $\bar{z} = x - iy$

अब,

विकल्प (A) के प्रयोग से,

$$z\bar{z} = x^2 + y^2,$$

पूर्ण रूप से वास्तविक

विकल्प (B) के प्रयोग से,

$$z\bar{z} = x^2 + y^2,$$

पूर्ण रूप से वास्तविक

विकल्प (C) के प्रयोग से,

$$z - \bar{z} = 2i \, \text{lm}(z)$$

पूर्ण रूप से वास्तविक

विकल्प (D) के प्रयोग से,

$$z + \bar{z} = 2\text{Re}(z)$$

पूर्ण रूप से वास्तविक

59. (D) $(1 + \omega - \omega^2)^2 + (1 - \omega + \omega^2)^2 + 1$

$= (-2\omega^2)^2 + (-2\omega)^2 + 1$

$= 4(\omega^3 . \omega + \omega^2) + 1$

$[\because 1 + \omega + \omega^2 = 0, \omega^3 = 1]$

$= 4(\omega + \omega^2) + 1$

$= 4(-1) + 1$

$= -4 + 1 = -3$

60. (C) हम जानते हैं, $(1 + i\sqrt{3})^{12} = a + ib$

अब, $\left[2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right]^{12} = a + ib$

$$\Rightarrow 2^{12}\left[\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right]^{12} = a + ib$$

$\Rightarrow 4096(\cos 4\pi + i\sin 4\pi) = a + ib$

$\Rightarrow 4096(1 + 0) = a + ib$

$\Rightarrow 4096 = a + ib$

दोनों पक्षों की तुलना करने पर, $b = 0$

61. (D) माना $(5 + 2\sqrt{6})^{x^2-3} = a$

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{(5 + 2\sqrt{6})^{x^2-3}}$$

$$= \frac{1}{(5 + 2\sqrt{6})^{x^2-3}} \times \frac{(5 - 2\sqrt{6})^{x^2-3}}{(5 - 2\sqrt{6})^{x^2-3}}$$

$$(5 - 2\sqrt{6})^{x^2-3} = \frac{1}{a}$$

$$\therefore a + \frac{1}{a} = 10$$

$\Rightarrow a^2 - 10a + 1 = 0$

श्रीधराचार्य के नियम से,

$$\Rightarrow a = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 4}}{2} = 5 \pm 2\sqrt{6}$$

$\Rightarrow 5 \pm 2\sqrt{6} = (5 + 2\sqrt{6})^{(x^2-3)}$

$\Rightarrow x^2 - 3 = \pm 1$

$\Rightarrow x^2 = 4$ या 2

$\Rightarrow x^2 = 4$

$\Rightarrow x = \pm 2$

या $x^2 = 2$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$

62. (D) माना $V = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0\}$

तथा $W = \{x, y) : xy - 0\}$

दोनों की उप समुच्चय नहीं है क्योंकि यह

$\alpha \in V, \beta \in V \Rightarrow \alpha - \beta \in V$ तथा $\alpha \in V, \alpha \in F \Rightarrow a\,\alpha \in F$ को सन्तुष्ट नहीं करती है।

63. (B) दिया है दो फलन f और g

माना जो फलन $F(x) - g(x)$

यह फलन सतत है

यह अवकलनीय है।

$F(x) = f'(x) - g'(x) = 0$

$\therefore \quad F(x) =$ स्थिरांक

$\therefore \quad f(x) - g(x) =$ स्थिरांक

64. (D) चूँकि समिश्र संख्याओं की तुलना नहीं की जा सकती है। अत: विकल्प (D) सत्य है।

65. (B) सम्बन्ध R निम्न प्रकार परिभाषित है

xRy

$= \{(x, y), x, y \in N : 2x + y = 41\}$

xRx

$= \{(x, x) \therefore x \in N : 2x + x = 41\}$

किन्तु यह सत्य नहीं है $x = \frac{41}{3}$ एक प्राकृतिक संख्या नहीं है

अतः स्वतुल्य सम्बन्ध नहीं है।

यहाँ $xRy = \{(x, y)\ x, y \in N : 2x + y = 41\}$

$yRx = \{(y, x)\ x, y \in N : 2y + x = 41\}$

$\therefore$ $xRy = yRx$, अतः सम्बन्ध सममित है।

66. (A) $\sin h^{-1} (\cot\theta)$ का मान ज्ञात करने के लिए

$\cot\theta = x$ रखने पर,

$$\sin h^{-1} x = \log(x + \sqrt{x^2+1})$$

$$= \log(\cot\theta + \sqrt{\cot^2\theta + 1})$$

$$= \log(\cot\theta + \operatorname{cosec}\theta)$$

67. (C) यहाँ $a * b = 1 + a + ab$

$b * a = 1 + b + ba \neq a * b$

अतः क्रमविनिमेय नहीं है।

$a * (b * c) = a * (1 + b + bc)$

$= 1 + a + a(1 + b + bc)$

$= 1 + a + a + ab + abc$

$(a * b) * c = (1 + a + ab) * c$

$= 1 + 1 + a + ab + (1 + a + ab)c$

$= 1 + 1 + a + ab + c + ac + abc$

अतः $a * (b * c) \neq (a * b) * c$

अतः साहचर्य नहीं है।

$\therefore$ न तो साहचर्य और न क्रमविनिमेय है।

68. (A) यहाँ a, b प्राकृतिक संख्याएँ हैं।

तथा $a\,Rb$ यदि a और b सह-अभाज्य हैं अर्थात् a और b में 1 के अलावा कोई और गुणनखण्ड नहीं है

यहाँ $a\,Ra$ सत्य है अर्थात् स्वतुल्य है

$a\,R\,b \Rightarrow b\,R\,a$ अर्थात् सममित है

अतः स्वतुल्य एवं सममित है

69. (A) दिया है वक्र

$x = 3t^2 + 1$

$y = t^3 - 1$ को $x = 1$ पर स्पर्श करता है

अतः $x = 1$ पर स्पर्श करता है

$\Rightarrow \quad x = 3t^2 + 1$

$\therefore \quad \frac{dx}{dt} = 6t$

$y = t^3 - 1$

$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 3t^2$

अब, $\quad \frac{dy}{dx} = \left(\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right) = \frac{3t^2}{6t} = \frac{t}{2}$

$\therefore \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(t=0)} = \frac{0}{2} = 0$

70. (A) माना $z = -i = 0 - i = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

दोनों पक्षों में वास्तविक तथा काल्पनिक भागों की तुलना करने पर,

$r\cos\theta = 0 \quad ...(i)$

तथा $\quad r\sin\theta = -1 \quad ...(ii)$

समीकरण (i) तथा (ii) का वर्ग करके जोड़ने पर,

$r^2\sin^2\theta + r^2\cos^2\theta = 0 + 1$

$\Rightarrow \quad r^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = 1$

$\Rightarrow r^2 = 1$

$\therefore r = \pm 1$

समीकरण (ii) को समी. (i) से भाग देने पर,

$\tan\theta = \infty = \tan 90^\circ$

$\Rightarrow \quad \theta = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$

परन्तु z का मुख्य कोणांक, $z = -\theta$

(चूँकि z चतुर्थ चतुर्थांश में स्थित है)

$z = \frac{-\pi}{2}$

$\therefore \quad z = -i$

$$= \pm 1\left\{\cos\left(\frac{-\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{2}\right)\right\}$$

$$-i = \pm 1\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\}$$

$[\because \cos(-\theta) = \cos\theta]$

अब, $\quad \sqrt{z} = \sqrt{-i}$

$(\because z = -i = \pm(1)^{1/2}\left(\cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{1/2}$

(ड्मिायवर प्रमेय के प्रयोग से)

$$= \pm 1\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \pm 1\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \pm\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\therefore \quad \sqrt{-i} = \pm\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)$$

71. (A) माना $z = -1 - i = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$-1 - i \quad = r\cos\theta + ri\sin\theta$

दोनों पक्षों में वास्तविक तथा काल्पनिक भागों की तुलना करने पर,

$r\cos\theta = -1 \quad ....(i)$

तथा $\quad r\sin\theta = -1 \quad ....(ii)$

समीकरण (ii) को समी (i) से भाग देने पर,

$$\frac{r\sin\theta}{r\cos\theta} = \frac{-1}{-1}$$

$$\Rightarrow \tan\theta = 1 = \tan\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

चूँकि z का कोणांक तृतीय चतुर्थांश में स्थित है।

$\therefore$ कोणांक $(z) = \pi + \theta = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$

72. (C) दिया है, x अक्ष के समान्तर एक रेखा जो वक्र से 45° कोण बनाती है।

अतः $\quad y = \sqrt{x}$

$\Rightarrow \quad y^2 = x$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$\Rightarrow \quad 2y\frac{dy}{dx} = 1$

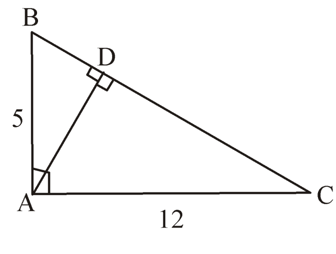
$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y} = 1$

$[\because m = \tan 45^\circ = 1]$

$\Rightarrow \quad 2y = 1$

$\Rightarrow \quad y = \frac{1}{2}$

73. (C)



दिया है,

ΔABC एक समकोण त्रिभुज है, जिसमें पाइथागोरस प्रमेय से, $\angle A = 90^\circ$

अतः $\quad BC^2 = AB^2 + AC^2$

$\because \quad (BC)^2 = 12^2 + 5^2$

$= 144 + 25 = 169$

$\Rightarrow \quad BC = \sqrt{169}$

$\therefore \quad BC = 13$ सेमी

$\because \dfrac{AB \times AC}{2} = \Delta ABC$ का क्षेत्रफल

$\because \dfrac{BC \times AD}{2} = \Delta ABC$ का क्षेत्रफल

$\therefore \dfrac{AB \times AC}{2} = \dfrac{BC \times AD}{2}$

$\Rightarrow \quad 5 \times 12 = 13 \times AD$

$\Rightarrow \quad AD = \dfrac{60}{13}$ सेमी

74. (C) $x = \left(\dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{3}\right)$

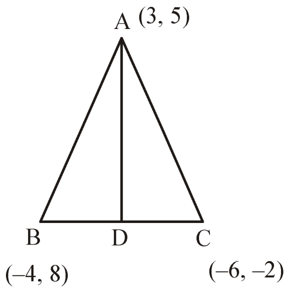
$= \dfrac{4+2+0}{3} = \dfrac{6}{3} = 2$

तथा $y = \left(\dfrac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$

$= \dfrac{6-2+2}{3} = \dfrac{6}{3} = 2$

अत: केन्द्रक के निर्देशांक (2, 2) हैं।

75. (C)



दिए गए बिन्दुओं के अनुसार, रेखा BC के मध्य D के निर्देशांक (–5, 3) होंगे।

$\because (x, y) = \left[\dfrac{-4-6}{2}, \dfrac{8-2}{2}\right]$

$(x, y) = (-5, 3)$

ΔABC में माध्यिका AD का समीकरण निम्न प्रकार ज्ञात करेंगे।

$y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$ से,

[यहाँ, $y_1 = 5, y_2 = 3, x_2 = -5, x_1 = 3$]

$\Rightarrow y - 5 = \dfrac{3-5}{-5-3}(x-3)$

$y - 5 = \dfrac{-2}{-8}(x-3)$

$\Rightarrow \quad 4y - 20 = x - 3$

$\Rightarrow \quad 4y - 20 = x - 3$

$\Rightarrow \quad x - 4y + 17 = 0$

76. (A) वर्ग, आयत व समान्तर चतुर्भुज सभी चतुर्भुज की श्रेणी में आते हैं।

अत: चतुर्भुज का समुच्चय समष्टीय समुच्चय है।

77. (B) दिया है, व्यंजक

$= \sum_{k=2}^{n} (k-1)(k-\omega)(k-\omega^2)$

$= \sum_{k=2}^{n} (k-1)(k^2+k+1)$

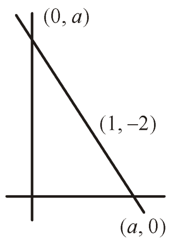
$= \sum_{k=2}^{n} (k^3-1)$

$= (2^3 + 3^3 + ... + n^3) - (n-1)$

$= (\Sigma n^3 - 1^3) - n + 1$

$= \left\{\dfrac{n(n+1)}{2}\right\}^2 - n$

78. (C) अक्षों से बराबर अन्त:खण्ड (माना a) काट वाली रेखा का समीकरण



$\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$ या $x + y = a$ है।

लेकिन यह (1, –2) से होकर जाती है।

अत: $\quad 1 - 2 = a$

$\Rightarrow \quad a = -1$

इस प्रकार से निर्मित सरल रेखा इस प्रकार है

$x + y + 1 = 0$

79. (D) प्रश्नानुसार,

$(h-3)^2 + (k+2)^2$

$= \left|\dfrac{5h - 12k - 13}{\sqrt{25+144}}\right|$

$h^2 + 9 - 6h + k^2 + 4 + 4h$

$= \dfrac{5h - 12k - 13}{13}$

$\Rightarrow 13h^2 + 13k^2 - 78h + 52k + 169$
$= 5h - 12k - 13$

$\Rightarrow 13h^2 + 13k^2 - 83h + 64k + 182$
$= 0$

(h, k) को (x, y) से परिभाषित करने पर,

$13x^2 + 13y^2 - 83x + 64y + 182 = 0$

जोकि बिन्दु के बिन्दुपथ का अभीष्ट समीकरण है।

80. (A) दिया है : $\sqrt{3}x - y = 5$

$y = \sqrt{3}x - 5$

$m_2 = \sqrt{3}$

तथा $x - \sqrt{3}y = 7$

$y = \dfrac{x}{\sqrt{3}} - \dfrac{7}{\sqrt{3}}$

$m_2 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\tan\theta = \left|\dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|$

$= \left|\dfrac{\sqrt{3} - \dfrac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \sqrt{3} \times \dfrac{1}{\sqrt{3}}}\right|$

$\tan\theta = \left|\dfrac{3-1}{\sqrt{3} \times 2}\right|$

$\tan\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\tan\theta = \tan 30^\circ$

$\theta = 30^\circ$

81. (B) $y = \log x$ और $y = 0$, को हल करने पर हमें प्राप्त होता है $x = 1$

$\therefore$ वक्र $y = \log x$

$y = 0$ और $x = e$ के अन्तर्गत घिरा क्षेत्रफल

$= \int_1^e y\,dx$

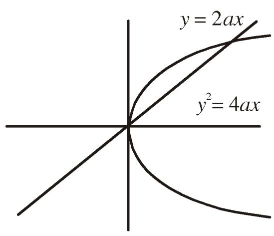
$= \int_1^e (\log_e x)\,dx$

$= [x \log x - x]_1^e$

$= (e \log e - e) - (1 \log 1 - 1)$

$= (e - e) - (0 - 1) = 1$

82. (C) $y^2 = 4ax$ और $y = 2ax$ को हल करने पर हमें प्राप्त होता है।



$x = 0$ या, $\dfrac{1}{a}$

और $\quad y = 0$ या, 2

$\therefore$ अभीष्ट क्षेत्रफल

$$= \int_0^{1/a} [f(x) - \phi(x)]dx$$

$$= \int_0^{1/a} (\sqrt{4ax} - 2ax)dx$$

$$= 2\sqrt{a}\int_0^{1/a} [(x^{1/2}) - (\sqrt{a}x)]dx$$

$$= 2\sqrt{a}\left[\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{\sqrt{a}x^2}{2}\right]_0^{1/a}$$

$$= 2\sqrt{a}\left[\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{\sqrt{a}x^2}{2}\right]_0^{1/a}$$

$$= 2\sqrt{a}\left[\frac{2}{3a^{3/2}} - \frac{1}{2a^{3/2}}\right]$$

$$= \frac{2}{a}\left[\frac{4-3}{6}\right] = \frac{1}{3a}$$

83. (A) $\frac{x-1}{l} = \frac{y-2}{m} = \frac{z+4}{n}$

परन्तु $3l - 16m + 7n = 0$

तथा $3l + 8m - 5n = 0$

दिये गये विकल्पों से

अत: अभीष्ट रेखा

अत: $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+4}{6}$

84. (A) दिया है, $y = 2x + c$,

तथा $y^2 = 8(x + 2)$

अत: $\quad (2x + c)^2 = 8(x + 2)$

$\Rightarrow \quad 4x^2 + c^2 + 4xc = 8x + 16$

$\Rightarrow 4x^2 - x(4c - 8) + c^2 - 16 = 0$

$\Rightarrow \quad b^2 - 4ac = 0$

$\therefore \ (4c - 8)^2 - 4\times 4(c^2 - 16) = 0$

$\Rightarrow 16c^2 + 64 - 64c - 16c^2 + 256 = 0$

$\Rightarrow -64c = -320$

$\Rightarrow c = \frac{320}{64} = 5$

$\Rightarrow c = 5$

85. (C) वृत्त से जाने वाले गोले का समीकरण है

$(x^2 + y^2 + z^2 - 4) + \lambda z = 0$

चूँकि वृत्त बिन्दु (1, 2, –1) से होकर गुजरता है अत:

$(1 + 4 + 1 - 4) + \lambda(-1) = 0$

$2 - \lambda = 0, \lambda = 2$

अत: गोला है

$x^2 + y^2 + z^2 + 2z - 4 = 0$

केन्द्र = (0, 0, –1)

त्रिज्या = $\sqrt{1+4+0} = \sqrt{5}$

आयतन = $\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi(\sqrt{5})^3$

$$= \frac{20\sqrt{5}}{3}\pi$$

86. (A) $|z - z_0| = c$ एक वृत्त निरूपित करता है जिसका केन्द्र z_0 और त्रिज्या c है।

अत: $|z - 3i| = 2$ एक वृत्त निरूपित करता है जिसका केन्द्र $3i$ और त्रिज्या 2 है।

87. (B) दिया है कि उत्केन्द्रता e वाला शांकव दीर्घवृत्त निरुपति करता है यह तभी सम्भव है जब e (उत्केन्द्रता) 0 से 1 के बीच हो अत:

$$0 < e < 1$$

88. (D) रेखा $\quad x + y\sqrt{3} = 4$ की प्रवणता

$$m_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

रेखा $\quad x\sqrt{3} - y = 5$ की प्रवणता

$$m_2 = \sqrt{3}$$

यहाँ $\quad m_1 m_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \times \sqrt{3}$

$= -1$

अत: दी गई रेखाओं के बीच का कोण 90° है।

89. (D) दिया है, $(z + 5)\ (\bar{z} + 5)$

$= z.\bar{z} + 5(z + \bar{z}) + 25$

$= |z|^2 + 2 \times 5|z| + 5^2$

$= |z + 5|^2$

90. (D) $f(a, a + h) = f(a, h)\ b = a + h$

$f(h) = f(a) + (h - a)f'(c)$

$\therefore \quad \frac{f(h) - f(a)}{h - a} = f'(c)$

इस प्रकार फलन को परिभाषित लग्रांजी प्रमेय (legrange mean value theorem) द्वारा किया जाता है।

91. (A) $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \quad \lambda I = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$

$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -2 & -\lambda & 0 \\ 0 & -3 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$

$\therefore \quad (2 + \lambda)(3 + \lambda) = 0$

$\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$

आव्यूह के लिए कैलै-हेमिल्टन प्रमेय के प्रयोग से

$A^2 + 5A + 61 = 0$

92. (B) माना

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 5+2i \\ -3 & 0 & -9 \\ -5-2i & 9 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad A^T = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -5-2i \\ 3 & 0 & 9 \\ 5+2i & -9 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^T = -\begin{bmatrix} 0 & 3 & 5+2i \\ -3 & 0 & -9 \\ -5-2i & 9 & 0 \end{bmatrix}$$

$A^T = -A$

अत: दिया गया आव्यूह विषम सममित आव्यूह है।

93. (A) $\begin{vmatrix} a-x & c & b \\ c & b-x & a \\ b & a & c-x \end{vmatrix} = 0$

$C_1 \to C_1 + C_2 + C_3$ करने पर

$$\begin{vmatrix} a+b+c-x & c & b \\ a+b+c-x & b-x & a \\ a+b+c-x & a & c-x \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (a+b+c-x)\begin{vmatrix} 1 & c & b \\ 1 & b-x & a \\ 1 & a & c-x \end{vmatrix} = 0$$

$(a + b + c - x)\ [1(b - x)(c - x) - c(c - x - a) + b(a - b + x)]$

$(a + b + c - x)\ [bc - cx - bx + x^2 - c^2 + cx + ac + ab - b^2 + bx]$

$(a + b + c - x)\ [x^2 + bc + ab + ac - c^2 - b^2]$

अत: $\quad a + b + c - x = 0$

$x = a + b + c$

दिया है कि

$a + b + c = 0$

$\therefore \ x = 0$

94. (C) $\Delta = (x + a)(x - b)(x + c) + (x + b)(x - a)(x - c)$

(विस्तार करने पर)

या, $0 = (x - b)(x^2 + ac + ax + cx) + (x + b)(x^2 - ax - cx + ac)$

$0 = x^3 + acx + ax^2 + cx^2 - bx^2 - abc - abx - bcx + x^3 - ax^2 - cx^2 + acx + bx^2 - abx - bcx + abc$

$0 = 2x(x^2 - ab - bc + ca)$

$\therefore \ x = 0$

95. (C) $\begin{vmatrix} 2 & e & 3 \\ 2 & \pi & 3 \\ 2 & \sqrt{2} & 3 \end{vmatrix} = 2\times 3\begin{vmatrix} 1 & e & 1 \\ 1 & \pi & 1 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{vmatrix}$

$= 2 \times 0 = 0$

(क्योंकि I और III स्तम्भ एक समान हैं)

96. (B) दिया है गया सारणिक

$= \begin{vmatrix} 2 & 8 & 4 \\ -5 & 6 & -10 \\ 1 & 7 & 2 \end{vmatrix}$

C_3 से 2 बाहर लेने पर

$= 2\begin{vmatrix} 2 & 8 & 2 \\ -5 & 6 & -5 \\ 1 & 7 & 1 \end{vmatrix}$

चूँकि C_1 और C_3 एक समान है।

$= 2 \times 0$

$= 0$

97. (C) $x^2 - 3x + k = 10$

$x^2 - 3x + k - 10 = 0$

मूलों का गुणनफल $\frac{c}{a} = k - 10$

दिया है, $2 = k - 10$

$k = 12$

98. (D) $\because x^2 - px + (8p - 15) = 0$ के दोनों मूल समान हैं।

अतः $b^2 - 4ac = 0$

$\therefore\ (-p)^2 = 4\,(8p - 15)$

$\Rightarrow p^2 = 32\,p - 60$

$\Rightarrow p^2 - 32\,p + 60 = 0$

$\Rightarrow p^2 - 30\,p - 2\,p + 60 = 0$

$\Rightarrow p(p - 30) - 2(p - 30) = 0$

$\Rightarrow (p - 2)\,(p - 30) = 0$

$\therefore p = 2$ तथा 30

99. (A) दिया है

$\{x : x^3 - 4x = 0\}$

$x^3 - 4x = 0$

$\Rightarrow x(x^2 - 4) = 0$

$\Rightarrow x(x - 2)\,(x + 2) = 0$

$\Rightarrow x = 0 \Rightarrow x - 2 = 0$

$\Rightarrow x = 2$

$\Rightarrow x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$

अतः $x = -2, 0, 2$

100. (C)

$R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{b}{2\sin B} = \frac{c}{2\sin C} = \frac{abc}{4\Delta}$

यहाँ $\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$\therefore \quad s = \frac{a+b+c}{2}$

$= \frac{15+20+25}{2} = 30$

$\therefore \Delta = \sqrt{30(30-15)(30-20)(30-25)}$

$= \sqrt{30\times15\times10\times5} = 150$

$R = \frac{15\times20\times25}{4\times150} = \frac{50}{4}$

$= \frac{25}{2} = 12.5$ सेमी

101. (B) $3^{4n+2} + 5^{2n+1} = 9\,.\,(3^4)^{n} + 5\cdot(5)^{2n}$

$= 9 \times (81)^n + 5\cdot(25)^n$

$n = 0$, संख्या $9 + 5 = 14$ जो 14 से विभाजित है।

$n = 1$ संख्या $= 9 \times 81 + 5 \times 25$

$= 729 + 125 = 854$

$= 61 \times 14$ जो कि 14 से विभाजित है।

अतः n की सभी मानों के लिए संख्या 14 से विभाजित है।

102. (B) दिया है $AC \parallel MN$

अतः

$\Rightarrow \frac{BN}{CN} = \frac{BM}{AN}$

$\Rightarrow \frac{5}{205} = \frac{BM}{AN}$

$\Rightarrow \frac{2}{1} = \frac{BM}{AN}$

$\Rightarrow BM : AN = 2 : 1$

103. (C) $\because$ मूल बराबर हैं, तो $B^2 - 4AC = 0$

$\therefore\ [2\,(b^2 - ac)]^2 - 4(a^2 - bc)\,(c^2 - ab) = 0$

$\Rightarrow (b^2 - ac)^2 - (a^2 - bc)\,(c^2 - ab) = 0$

$\Rightarrow b^4 + a^2c^2 - 2b^2ac - a^2c^2 + a^3b + bc^3 - b^2ac = 0$

$\Rightarrow b^4 - 3b^2ac + a^3b + bc^3 = 0$

$\Rightarrow b[b^3 - 3abc + a^3 + c^3] = 0$

$\Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$

$\Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

104. (A) दिया गया बहुपद $= (x + 1)\,(x + 3).\,x$

अतः $x(x + 1)(x + 3) = 0$

$x = 0$

जब, $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

$x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$

अतः बहुपद $x = 0, x = -1, x = -3$, तीन बिन्दुओं पर काटता है।

105. (B) $v = \frac{ds}{dt} = \begin{cases} 2t+13, & 0 \le t \le 5 \\ 3t+8, & 5 < t \le 7 \\ 4t+1, & t > 7 \end{cases}$

$\therefore$ अभीष्ट दूरी

$= \int_0^{10} \frac{ds}{dt}\,dt$

$= \int_0^5 (2t+13)\,dt + \int_5^7 (3t+8)\,dt + \int_7^{10} (4t+1)\,dt$

$= \left(t^2 + 13t\right)_0^5 + \left[\frac{3}{2}t^2 + 8t\right]_5^7 + \left[2t^2 + t\right]_7^{10}$

$= 90 + \frac{3}{2}(49 - 25) + 8(7 - 5) + 2\,(10^2 - 7^2) + (10 - 7)$

$= (90 + 36 + 16 + 102 + 3) = 247$

106. (B) दिया गया है,

$v_A = 30$ किमी/घण्टा, पूर्व की ओर

$v_B = 40$ किमी/घण्टा, पश्चिम की ओर

$\therefore v_{AB} =$ ट्रेन A के वेग एवं ट्रेन B के विपरीत वेग का परिणामी

$v_{AB} = (v_A + v_B)$, पूर्व की ओर

$= (30 + 40) = 70$ किमी/घण्टा, पूर्व की ओर।

107. (A) हम जानते हैं,

$S_{n\text{th}} = u + \frac{1}{2}f(2n - 1)$

$\therefore S_{(n+1)\text{th}} = u + \frac{1}{2}f[2(n + 1) - 1]$

$= u + \frac{1}{2}f(2n - 1) + f$

$S_{(n+2)\text{th}} = u + \frac{1}{2}f[2(n + 2) - 1]$

$= u + \frac{1}{2}f(2n - 1) + 2f$

$\therefore S_{(n+1)\text{th}} - S_{n\text{th}} = f$

$S_{(n+2)\text{th}} - S_{(n+1)\text{th}} = 2f - f$ एवं इसी प्रकार आगे मान प्राप्त होते हैं।

$\therefore$ क्रमागत सेकण्ड में तय की गई दूरियाँ समान्तर श्रेणी में हैं, जिसका सर्वान्तर f है।

108. (C) माना कि भवन की ऊँचाई h फीट है एवं लिया गया कुल समय t है, तब

$h = \frac{1}{2}gt^2$ ....(i)

एवं $20 = \frac{1}{2}gt^2 - \frac{1}{2}g\left(t - \frac{1}{4}\right)^2$ ....(ii)

समीकरण (ii) से,

$$20 = \frac{1}{4}gt - \frac{1}{32}g = 8t - 1,$$

[$\because g = 32$ फीट/सेकण्ड^2]

$$\therefore t = \frac{21}{8}$$

अत: समीकरण (i) से,

$$h = \frac{1}{2} . 32\left(\frac{21}{8}\right)^2$$

$$= \frac{441}{4} \text{ फीट} = 110.25 \text{ फीट।}$$

109. (A) पिण्ड का भार $w = mg$ है। चूँकि g का मान पृथ्वी सतह पर महत्तम होता है। अत: भार भी महत्तम होगा।

110. (D) डोरी के टूटने से पहले, द्रव्यमानों का त्वरण

$$= f_1 = \left(\frac{5-3}{5+3}\right)g = \frac{2}{8}g = \frac{g}{4}$$

यदि वेग v_1 है, जबकि द्रव्यमान 9 मीटर गति करता है, तब

$$v_1^2 = 2 \times 9 \times f_1 = 2 \times 9 \times \frac{g}{4} = 9g/2$$

$$v_1^2 = \frac{9 \times 10}{2}$$

$\Rightarrow v_1 = 3\sqrt{5}$ मी/सेकण्ड

जब डोरी टूटती है, तब दोनों द्रव्यमान गुरुत्व g के अन्तर्गत गति करेंगे। अतैव का द्रव्यमान 3 किग्रा का द्रव्यमान मंदन g के अन्तर्गत ऊपर की ओर $v_1 = 3\sqrt{5}$ मी/सेकण्ड के वेग से गति करेगा (जब डोरी टूटती है) यदि यह द्रव्यमान x मीटर दूरी तय करता है। तब, $0 = v_1^2 - 2gx$

$$(3\sqrt{5})^2 - 2 \times 10 \times x = 0$$

$$\Rightarrow 45 - 20x = 0$$

$$\Rightarrow 20x = 45$$

$\Rightarrow x = 2.25$ मीटर

111. (A) माना $y = \log_{0.001} 0.0001$

$$\Rightarrow \quad (0.001)^y = 0.0001$$

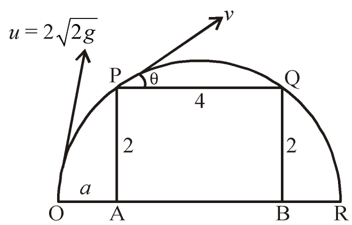
$$\Rightarrow \quad \left(\frac{1}{1000}\right)^y = \left(\frac{1}{10000}\right)$$

$$\Rightarrow \quad 10^{-3y} = 10^{-4}$$

$$\Rightarrow \quad -3y = -4$$

$$\therefore \quad y = 4/3$$

112. (C) माना कि O पर कण का प्रक्षेप्य कोण α एवं प्रक्षेप्य वेग $u = 2\sqrt{(2g)}$ है। माना कि AP एवं BQ दो दीवारें PQ = 4 मीटर की दूरी पर है। यदि P पर कण का वेग u एवं क्षैतिज के साथ कोण θ है, तब



$$u = \sqrt{u^2 - 2gh}$$

$= \sqrt{4 \times 2g - 2 \times 2g} = \sqrt{4g}$ अत: P पर वेग

$u = \sqrt{4g}$ है, जो क्षैतिज के साथ 45° का कोण बनाता है।

$$\therefore \text{ P से Q के लिए समय T} = \frac{2u\sin\theta}{g}$$

$$= \frac{2\sqrt{4g}}{g}\sin 45° = 2\sqrt{(2/g)}$$

$\therefore$ अभीष्ट समय $= 2\sqrt{(2/g)}$

113. (C) यदि गोली का द्रव्यमान m किग्रा है, तब संवेग के समीकरण से,

$$600\,m = (12 + m)\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow 400\,m = 12 + m$$

$$399\,m = 12$$

$\Rightarrow m = \frac{4}{133}$ किग्रा

E_1 = संघट्ट से पहले गतिज ऊर्जा

$= \frac{1}{2} \times \frac{4}{133} \times 600 \times 600$ जूल

E_2 = संघट्ट के बाद गतिज ऊर्जा

$= \frac{1}{2}\left(12 + \frac{4}{133}\right) \times \left(\frac{3}{2}\right)^2$ जूल

$\therefore$ गतिज ऊर्जा में प्रतिशत हानि

$$= \frac{E_1 - E_2}{E_1} \times 100$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \times \frac{4}{133} \times 600 \times 600 - \frac{1}{2}\left(12 + \frac{4}{133}\right) \times \left(\frac{3}{2}\right)^2}{\frac{1}{2} \times \frac{4}{133} \times 600 \times 600} \times 100$$

$$= \frac{399}{4} = 99.75\%$$

114. (C) माना कि जिस वेग से मजदूर मिस्त्री को ईंट फेंक रहा है वह वेग u_1 एवं मिस्त्री के पास जिस वेग से ईंट मिल रही है वह वेग 16 फीट/सेकण्ड है। तब

$$16^2 = u_1^2 - 2g \times 16$$

$\Rightarrow u_1 = \sqrt{1280}$ फीट/सेकण्ड

यदि मिस्त्री को प्रति सेकण्ड फेंकी जा रही ईंट का द्रव्यमान m है तब w_1 = मजदूर के द्वारा प्रति सेकण्ड किया गया कार्य

$= \frac{1}{2} m u_1^2 = 640$ m फीट-पाउन्डल

यदि मजदूर द्वारा u_2 वेग से ईंट फेंकी जाती है जो ठीक मिस्त्री के हाथों में पहुँचती है, तब

$$0 = u_2^2 - 2g \times 16$$

$\Rightarrow u_2 = 32$ फीट/सेकण्ड

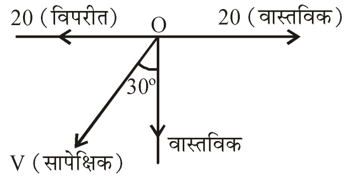
$\therefore w_2$ = मजदूर द्वारा प्रतिदिन किया गया कार्य $= \frac{1}{2} m u_2^2 = 512$ m फीट पाउन्डल

अत: शेष बचत ऊर्जा $= (w_1 - w_2)/w_1$

$$= \frac{1}{5}$$

115. (C) माना u बारिश का वास्तविक वेग तथा v व्यक्ति का वास्तविक वेग है।

व्यक्ति के सापेक्ष बारिश का वेग
= बारिश का वास्तविक वेग – व्यक्ति का वास्तविक वेग



क्षैतिज तथा ऊर्ध्वाधर घटकों में वियोजित करने पर,

V cos30° = u एवं V sin30° = 20 अर्थात्

$$\frac{V}{2} = 20,$$

$$\therefore V = 40$$

$$\therefore 40\frac{\sqrt{3}}{2} = u$$

$\Rightarrow u = 20\sqrt{3}$ किमी/घण्टा

116. (D) माना कि प्रारम्भिक वेग u मी/सेकण्ड एवं त्वरण f मी/सेकण्ड^2 है।

अत: $u + \frac{1}{2}f(2 \times 3 - 1) = 10$

$\Rightarrow u + \frac{5}{2}f = 10$ ....(i)

एवं $u + \frac{1}{2}f(2 \times 4 - 1) = 12$

$\Rightarrow u + \frac{7}{2}f = 12$ ....(ii)

समीकरण (ii) से (i) घटाने पर

$0 + \frac{2}{2}f = 2$

$\Rightarrow f = 2$ मी/सेकण्ड^2

f का मान समीकरण (i) में रखने पर,

$u + \frac{5}{2} \times 2 = 10$

$\Rightarrow u + 5 = 10$

$\Rightarrow u = 5$ मी/सेकण्ड

117. (B) दिया गया है, $\frac{R}{T} = \sqrt{2}$ ....(i)

एवं $\frac{R}{W} = \sqrt{3} + 1$ ....(ii)

समीकरण (ii) को (i) से विभाजित करने पर,

$\Rightarrow \frac{\frac{R}{W}}{\frac{R}{T}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \frac{T}{W} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$

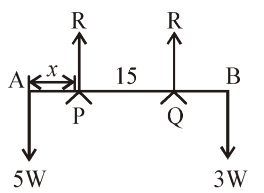
$\Rightarrow T = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} W$

$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)W$

$\Rightarrow R = T\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{3}+1\right)W$

$= \left(\sqrt{3}+1\right)W$

118. (C) माना खूँटियों P एवं Q पर प्रतिक्रिया बल R व R इस प्रकार हैं, कि AP = x



सभी बलों के ऊर्ध्वाधर वियोजन पर,

$R + R = (5W + 3W) = 8$ W

$\Rightarrow 2R = 8W$

$\Rightarrow R = 4W$

A के परित: बल आघूर्ण लेने पर,

R. AP + R.AQ = 3W.AB

$\Rightarrow 4W.x + 4W(x + 15) = 3W.30$

$\Rightarrow 4Wx + 4Wx + 60\,W = 90W$

$\Rightarrow 8Wx = 30W$

$\Rightarrow 8x = 30$

$\Rightarrow x = 3.75$ सेमी

$\therefore$ AP = x = 3.75 सेमी एवं AQ = $(x + 15)$ सेमी = 18.75 सेमी।

119. (D) माना कि बल $\vec{P}$ एवं $\vec{Q}$ के बीच का कोण α है। यह दिया गया है कि $\vec{P}$ एवं $\vec{Q}$ के परिणामी का परिमाण P है। इसलिए

$P^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha$

$0 = Q^2 + 2PQ\cos\alpha$

$\Rightarrow Q(Q + 2P\cos\alpha) = 0$

$\Rightarrow Q + 2P\cos\alpha = 0$

माना कि बल $\vec{Q}$ एवं नये परिणामी के बीच का कोण θ है, तब

$$\tan\theta = \frac{2P\sin\alpha}{Q + 2P\cos\alpha}$$

$\Rightarrow \tan\theta = \infty$

$\tan\theta = \tan 90^\circ$

$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$

अर्थात् नया परिणामी $\vec{Q}$ से समकोण पर है।

120. (A) 12 खिलाड़ियों में से 8 खिलाड़ियों के चयन करने के तरीकों की संख्या = $^{12}C_8$

$= \frac{12!}{8!(12-8)!} = \frac{12!}{8!\,4!}$

$= \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8!}{4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 8!}$

$\Rightarrow \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9}{4 \times 3 \times 2} = 495$

तथा एक कप्तानं व उपकप्तान के चयन करने के तरीकों की संख्या

$= {}^8C_1 \times {}^7C_1 = 8 \times 7 = 56$

अत: कुल तरीकों की संख्या

$= 495 \times 56 = 27720$

121. (C) माना बिन्दु A, B, C पर कार्यरत् बल क्रमश: $\lambda a, \lambda b, \lambda c$ हैं। माना ΔABC के भीतर बिन्दु O पर इन बलों का परिणामी $\lambda(a + b + c)$ है।

माना AD $\perp$ BC और OL $\perp$ BC

BC के परित: बलों के आघूर्णों का योग = BC के परित: परिणामी बल का आघूर्ण

$\Rightarrow \lambda a.AD = \lambda(a + b + c).OL$

$\Rightarrow \lambda(BC.\,AD) = \lambda(a + b + c)OL$

$\Rightarrow 2\Delta = 2s.\,OL$

$\Rightarrow OL = \frac{\Delta}{s}$

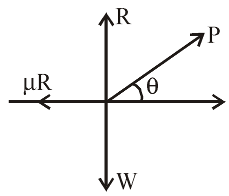
$\Rightarrow OL = r$ $\quad (\because r = \Delta/s)$

अत: बलों का केन्द्र अन्त:केन्द्र होगा।

122. (C) चूँकि पाँचवाँ बल प्रथम चारों बलों के परिणामी के बराबर एवं विपरीत हो भी सकता है और नहीं भी हो सकता है।

$\therefore$ अत: $n = 4$

123. (B) माना न्यूनतम बल P तल से θ कोण पर कार्यरत है जो कि पिण्ड को गति कराने के लिए आवश्यक है। अब बलों को क्षैतिज एवं ऊर्ध्वाधर तल में वियोजित करने पर,



$P\cos\theta = \mu R$ तथा $P\sin\theta + R = W$

$\therefore P\cos\theta = \mu[W - P\sin\theta]$

या $P[\cos\theta + \mu\sin\theta] = \mu W$

या $P = \dfrac{\mu W}{\cos\theta + \frac{\sin\lambda}{\cos\lambda}.\sin\theta}$

$= \frac{\mu W\cos\lambda}{\cos(\theta-\lambda)} = \frac{W\sin\lambda}{\cos(\theta-\lambda)}$

अब P न्यूनतम है जब $\cos(\theta - \lambda)$ अधिकतम है अर्थात् $\cos(\theta - \lambda) = 1$

$\therefore$ न्यूनतम $P = W\sin\lambda$

किन्तु W = 1 टन = 1000 किग्रा एवं P = 600 किग्रा

$\therefore \sin\lambda = \frac{P}{W} = \frac{600}{1000} = \frac{3}{5}$ एवं

$\tan\lambda = \frac{3}{4}$ अत: $\mu = \frac{3}{4}$

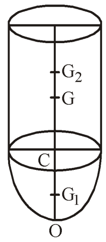
124. (B) त्रिभुज के शीर्षों पर रखे गये कणों तथा त्रिभुज का गुरुत्व केन्द्र समान होगा अर्थात् इन कणों का गुरुत्व केन्द्र केन्द्रक होगा।

125. (A) $CG_1 = \frac{3a}{8}$, [अर्द्ध गोले का गुरुत्व केन्द्र]

$CG_2 = \frac{a}{2}$, [बेलन का गुरुत्व केन्द्र]

$\therefore\ OG_1 = a - \frac{3a}{8} = \frac{5a}{8}$

एवं $OG_2 = a + \frac{a}{2} = \frac{3a}{2}$



माना कि संयुक्त पिण्ड का गुरुत्व केन्द्र G है, तब

$$OG = \frac{\left(\frac{2}{3}\pi a^3 \rho g\right)\frac{5a}{8} + \left(\pi a^2 \times a\rho g\right)\frac{3a}{2}}{\frac{2}{3}\pi \alpha^3 \rho g + \pi a^2 a\rho g}$$

$$= \frac{\pi a^3 \rho g\left[\frac{2}{3} \times \frac{5a}{8} + \frac{3a}{2}\right]}{\pi a^3 \rho g\left[\frac{2}{3} + 1\right]}$$

$$= \frac{\frac{5a}{12} + \frac{3a}{2}}{\frac{2}{3} + 1} = \frac{23a}{20} > a$$

$\because$ C के ऊपर G स्थित है।

अत: G बेलन के अन्दर होगा।

❑❑

उ. प्र. लोक सेवा आयोग, एल.टी. ग्रेड, 2018
गणित
हल प्रश्न-पत्र

परीक्षा तिथि : 29-07-2018

1. यदि $(5+6\cos\theta+2\cos2\theta)$ के अधिकतम और न्यूनतम मान, द्विघात समीकरण $x^2 - px + q = 2$ संतुष्ट करते हैं, तो p, q हैं, क्रमशः—

If the maximum and minimum values of $(5+6\cos\theta+2\cos2\theta)$ satisfy the quadratic equation $x^2 - px + q = 2$, then p, q are respectively.

(A) 13, 12 (B) 12, 13

(C) 14, 13 (D) 13, 14

1. (A) माना $y = 5 + 6\cos\theta + 2\cos2\theta$

θ के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{d\theta} = -6\sin\theta - 4\sin2\theta$$

न्यूनतम व महत्तम मान के लिए

$$\frac{dy}{d\theta} = 0$$

$$-6\sin\theta - 4\sin2\theta = 0$$

$$\Rightarrow -6\sin\theta - 8\sin\theta\cos\theta = 0$$

$$\Rightarrow -2\sin\theta(3+4\cos\theta) = 0$$

$\sin\theta = 0$ या $3 + 4\cos\theta = 0$

$\theta = 0$ या $\cos\theta = -\frac{3}{4}$

अब $\frac{d^2y}{d\theta^2} = -6\cos\theta - 8\cos2\theta$

$\theta = 0$ पर

$$\frac{d^2y}{d\theta^2} = -6-8 = -14$$

$\therefore$ $\theta = 0$ पर y का मान अधिकतम होगा

$$y_{max} = 5 + 6\times\cos0 + 2\times\cos0$$

$$y_{max} = 13$$

$\cos\theta = -\frac{3}{4}$ पर

$$\frac{d^2y}{d\theta^2} = -6\times\left(-\frac{3}{4}\right) - 8\times\left[2\times\frac{9}{16}-1\right]$$

$$= \frac{9}{2} - 8\times\frac{1}{8} = \frac{7}{2}$$

$\therefore$ $\theta = \cos^{-1}\left(-\frac{3}{4}\right)$ पर y का मान न्यूनतम होगा

$$\therefore y_{min} = 5 - 6\times\frac{3}{4} + 2\times\left[2\times\frac{9}{16}-1\right]$$

$$= 5 - \frac{9}{2} + 2\times\frac{1}{8}$$

$$y_{min} = 5 + \frac{1}{4} - \frac{9}{2}$$

$$y_{min} = \frac{20+1-18}{4}$$

$$y_{min} = \frac{3}{4}$$

y के अधिकतम व न्यूनतम मान समीकरण $x^2 - px + q = 2$ को सन्तुष्ट करते हैं।

$\therefore$ $13^2 - 13p + q = 2$ ...(i)

व $\left(\frac{3}{4}\right)^2 - \frac{3}{4}p + q = 2$ ...(ii)

घटाने पर,

$$169 - \frac{9}{16} = 13p - \frac{3}{4}p$$

$$\Rightarrow \frac{16\times169-9}{16} = \frac{52p-3p}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{49p}{4} = \frac{2695}{16}$$

$$p = \frac{2695\times4}{49\times16} = 13.75$$

समी (i) से

$$13^2 - 13\times13.75 + q = 2$$

$$q = 178.75 - 169 + 2$$

$$q = 11.75$$

2. श्रेणी $72 + 70 + 68 + ... + 40$ का योगफल है—

The sum of the series 72 + 70 + 68 + ... + 40 is :

(A) 950 (B) 952

(C) 954 (D) 956

2. (B) यहाँ $72 + 70 + 68 + ...+ 40$

प्रथम पद $(a) = 72$

सार्वान्तर $(d) = 70 - 72 = -2$

अन्तिम पद $(l) = 40$

माना पदों की संख्या $= n$

$\therefore$ nवाँ पद = अन्तिम पद

$$72 + (n-1)d = 40$$

$$72 + (n-1)\times(-2) = 40$$

$$(n-1) = \frac{32}{2} = 16$$

$$= \boxed{n = 17}$$

पदों का योगफल

$$S_n = \frac{n}{2}(a+l)$$

$$S_{17} = \frac{17}{2}[72+40]$$

$$S_{17} = \frac{17}{2}\times112 = 17\times56$$

$$S_{17} = 952$$

3. दिया गया है कि पूर्णांक संख्याओं का समुच्चय z, द्वि-आधारी संक्रिया *, जो $a * b = a + b + 1$; $a, b \in Z$ द्वारा परिभाषित है, तो सापेक्ष एक समूह बनाता है। इस समूह में -2 का प्रतिलोम है—

Given that the set Z of integers forms a group under the binary operations *, defined by $a * b = a + b + 1$; $a, b \in Z$. The inverse of -2 in the group is :

(A) 2 (B) 4

(C) -2 (D) 0

3. (D) $a * b = a + b + 1$

माना (-2) का प्रतिलोम x है

तब $-2 * x = -1$

($\because -1$ तत्समक गुण है।)

$\therefore$ $-2 + x + 1 = -1$

$$x = -2 + 2$$

$$x = 0$$

अर्थात् $(-2)^{-1} = 0$

4. श्रेणी $\frac{1}{21} + \frac{1}{77} + \frac{1}{165} + ...$ के प्रथम दस पदों का योग है—

The sum of first ten terms of the series $\frac{1}{21} + \frac{1}{77} + \frac{1}{165} + ...$

(A) $\frac{10}{129}$ (B) $\frac{20}{129}$

(C) $\frac{30}{129}$ (D) $\frac{40}{129}$

4. (A) $\frac{1}{21} + \frac{1}{77} + \frac{1}{165} + ...$

$$\frac{1}{3\times7} + \frac{1}{7\times11} + \frac{1}{11\times15} + ...$$

श्रेणी का nवाँ पद

$$T_n = \frac{1}{(4n-1)(4n+3)}$$

$$T_n = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n+3}\right]$$

[आंशिक भिन्न करने पर]

$n = 1, 2, 3, ...$ रखने पर

$T_1 = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{7}\right]$

$T_2 = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{7} - \frac{1}{11}\right]$

$T_3 = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{11} - \frac{1}{15}\right]$

$\vdots$

$T_9 = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{35} - \frac{1}{39}\right]$

$T_{10} = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{39} - \frac{1}{43}\right]$

$T_1 + T_2 + T_3 + ... T_{10}$

$= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + ... - \frac{1}{39} + \frac{1}{39} - \frac{1}{43}\right]$

या $S_{10} = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{43}\right] = \frac{1}{4}\left[\frac{43-3}{129}\right]$

$= \frac{1}{4}\left[\frac{40}{129}\right]$

$S_{10} = \frac{10}{129}$

5. समीकरणों $ax^2 + bx + c = 0, a'x^2 + b'x + c' = 0$ के एक उभयनिष्ठ मूल होने का प्रतिबंध है—

The condition that the equations $ax^2 + bx + c = 0, a'x^2 + b'x + c' = 0$ have a common root is :

(A) $(bc' - b'c)^2 = (ca' - c'a)(ab' - a'b)$

(B) $(ab' - a'b)^2 = (ca' - c'a)(bc' - b'c)$

(C) $(ca' - c'a)^2 = (bc' - b'c)(ab' - a'b)$

(D) उपर्युक्त में से कोई नहीं/None of the above

5. (C) $ax^2 + bx + c = 0$

$a'x^2 + b'x + c' = 0$

$\therefore \; a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$

व $a'\alpha^2 + b'\alpha + c' = 0$

सूत्र $\frac{x^2}{b_1c_2 - c_1b_2} = \frac{x}{a_1c_2 - c_1a_2} = \frac{1}{a_1b_2 - b_1a_2}$

$\frac{\alpha^2}{bc' - b'c} = \frac{\alpha}{ca' - c'a} = \frac{1}{ab' - ba'}$

$\alpha = \frac{bc' - b'c}{ca' - c'a}$

दूसरे व तीसरे से,

$\alpha = \frac{ca' - c'a}{ab' - ba'}$

$\therefore \; \frac{bc' - b'c}{ca' - c'a} = \frac{ca' - c'a}{ab' - ba'}$

$(ca' - c'a)^2 = (bc' - b'c)(ab' - a'b)$

6. p का वह मान, जिसके लिए समीकरण $x^2 - (p-2)x - p + 1 = 0$ के मूलों के वर्गों का योग न्यूनतम हो, होगा—

The value of p for which the sum of the squares of the roots of the equation $x^2 - (p-2)x - p + 1 = 0$ is minimum, will be

(A) 0 (B) 1

(C) 2 (D) 3

6. (B) $x^2 - (p-2)x - p + 1 = 0$

माना मूल α व β हैं।

तब $\alpha + \beta = p - 2\left(\frac{-b}{a}\right)$

व $\alpha.\beta = 1 - p\left(\frac{c}{a}\right)$

अब $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha.\beta$ से

$\alpha^2 + \beta^2 = (p-2)^2 - 2(1-p) = y$ (माना)

$\therefore \; y = p^2 + 4 - 4p - 2 + 2p$

$y = p^2 - 2p + 2$

या $y = (p-1)^2 + 1$

y के न्यूनतम मान के लिए $p = 1$

7. फलन $f(x) = \frac{\log_2(x+3)}{x^2 + 3x + 2}$ का प्रान्त है—

The domain of the function $f(x) = \frac{\log_2(x+3)}{x^2 + 3x + 2}$ is :

(A) $R - \{-1, -2\}$

(B) $(-2, \infty)$

(C) $R - \{-1, -2, -3\}$

(D) $(-3, \infty) - \{-1, -2\}$

7. (D) यहाँ $f(x) = \frac{\log_2(x+3)}{x^2 + 3x + 2}$

फलन $f(x)$ परिभाषित होगा यदि

$x + 3 > 0$ तथा $x^2 + 3x + 2 \neq 0$

या $x > -3$ तथा $(x+2)(x+1) \neq 0$

या $x > -3$ तथा $x \neq -1, -2$

अतः फलन $f(x)$ का प्रान्त $= (-3, \infty) - \{-1, -2\}$

8. मान लीजिए कि * एक द्वि-आधारी संक्रिया, धनात्मक परिमेय संख्याओं के समुच्चय Q^+ पर नियम $a * b = \frac{ab}{3}, \; \forall \; a, b \in Q^+$ द्वारा परिभाषित है। तब 4 * 6 का प्रतिलोम है—

Let * be a binary operation defined on the set of positive rational numbers Q^+ by the rule $a * b = \frac{ab}{3}, \; \forall \; a, b \in Q^+$. Then the inverse of 4 * 6 is :

(A) $\frac{9}{8}$ (B) $\frac{2}{3}$

(C) $\frac{3}{8}$ (D) $\frac{3}{2}$

8. (A) $a * b = \frac{ab}{3}$

प्रतिलोम $a \to a^{-1}$

$\therefore \; aoa^{-1} = e \; \forall \, a \in Q^+$

व तत्समक संक्रिया

$aoe = eoa = a$

अतः $a * e = \frac{a \times e}{3}$

$\Rightarrow \; a = \frac{ae}{3} \Rightarrow e = 3$

तथा $\frac{4*6}{3} = \frac{4 \times 6}{3} = 8$

यहाँ $8 * 8^{-1} = 3 \; (\because a * a^{-1} = e)$

अतः $\frac{8.(8^{-1})}{3} = 3$

$(8^{-1}) = \frac{9}{8}$

अर्थात् 4 * 6 का प्रतिलोम $= \frac{9}{8}$

9. अन्-आबेली समूह की न्यूनतम कोटि है—

The least order of non-Abelian group is :

(A) 4 (B) 5

(C) 6 (D) 8

9. (C) एक अन्-आबेली समूह, जो अन्-विनिमेय भी कहलाता है। एक ऐसा समूह है जिसके कुछ तत्व आवागमन नहीं करते हैं। सबसे सरल अन्-आबेली समूह द्विकफलक समूह D3 होता है जिसका क्रम 6 है।

10. यदि फलन $f : R \to R$, $f(x) = x^2 + x$ से परिभाषित है, तो फलन f है—

If the function $f : R \to R$ is defined by $f(x) = x^2 + x$ then the function f is :

(A) एकैकी पर आच्छादक नहीं/one-one but not onto

(B) आच्छादक पर एकैकी नहीं/onto but not one-one

(C) एकैकी एवं आच्छादक दोनों/both one-one and onto

(D) न तो एकैकी, न ही आच्छादक/neither one-one nor onto

10. (A) $f: R \to R,\ f(x) = x^2 + x$

माना x_1 व x_2 कोई दो मान इस प्रकार हैं कि $x_1, x_2 \in R$

अब $f(x_1) = f(x_2)$

$x_1^2 + x_1 = x_2^2 + x_2$

$x_1^2 - x_2^2 + x_1 - x_2 = 0$

$(x_1 - x_2)[x_1 + x_2 - 1] = 0$

$\therefore\ x_1 = x_2$

व $x_1 + x_2 - 1 = 0$

अतः फलन एकैकी नहीं है क्योंकि दोनों स्थितियाँ सम्भव हैं।

तथा माना $y = x^2 + x$ जहाँ $y \in R\ \forall y$

अतः $x \in R$ के लिए y सम्भव है परन्तु y के प्रत्येक मान के लिए कोई बिम्ब नहीं है।

अतः $f(x)$ आच्छादक नहीं है।

11. निम्नलिखित कथनों पर विचार कीजिए—

Consider the following statements :

I. यदि A एक विषम-सममित आव्यूह है, तो A^2 सममित होगा।/If A is skew-symmetric matrix, then A^2 is symmetric.

II. एक विषम कोटि वाले विषम-सममित आव्यूह का अनुरेख सदैव शून्य होता है।/Trace of a skew-symmetric matrix of an odd order is always zero.

उपर्युक्त कथनों में से कौन-सा/से सत्य है/हैं—

Which of the above statements is/are true ?

(A) केवल I/Only I

(B) केवल II/Only II

(C) I और II दोनों/Both I and II

(D) न तो I न ही II/Neither I nor II

11. (B) I. यदि A एक विषम सममित आव्यूह है।

$\therefore\ A' = -A$

तो $(A^2)' = (A')^2$

$(A^2)' = (-A)^2$

$(A^2)' = A^2$

अतः A^2 एक सममित आव्यूह है।

II. एक विषम कोटि वाले विषम-सममित आव्यूह का अनुरेख सदैव शून्य होता है।

माना A एक विषम-सममित आव्यूह है जिसकी कोटि $n \times n$ है जहाँ n एक विषम संख्या है।

तब परिभाषा से,

$\det(A) = \det(A')$ ...(i)

तथा यह एक विषम सममित आव्यूह है।

$\therefore\ \det(A') = (-1)^n \det(A)$

($\because$ n एक विषम संख्या है।)

$\therefore\ \det(A') = -\det(A)$ ...(ii)

समी. (i) व (ii) से,

$\det(A) = -\det(A)$

$2\det(A) = 0$

या $\det(A) = 0$

अर्थात् विषम सममित आव्यूह के विकर्ण के तत्व शून्य हैं।

अतः इस आव्यूह का अनुरेख भी शून्य होगा।

12. समीकरण निकाय

$$x + 2y + 3z = 1$$
$$2x + y + 3z = 2$$
$$x + y + 2z = 3 \text{ का}$$

The system of equations

$$x + 2y + 3z = 1$$
$$2x + y + 3z = 2$$
$$x + y + 2z = 3$$

has

(A) कोई हल नहीं है/no solution

(B) अद्वितीय हल है/unique solution

(C) अनन्त हल है/infinite solution

(D) उपर्युक्त में से कोई नहीं/None of the above

12. (A) समी. $x + 2y + 3z = 1$

$2x + y + 3z = 2$

$x + y + 2z = 3$

अतः $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$,

$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

व $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

$\therefore\ |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

$= 1(2 - 3) - 2(4 - 3) + 3(2 - 1)$

$= -1 - 2 + 3 = 0$

$\therefore\ |A| = 0$

अतः आव्यूह व्युत्क्रमणीय नहीं है।

अर्थात् समीकरणों का कोई हल नहीं है।

13. यदि A एक 2×2 आव्यूह इस प्रकार है कि अनुरेख A = 6, $|A| = 12$, तो अनुरेख (A^{-1}) है—

If A is a 2×2 matrix such that trace A = 6, $|A| = 12$, then trace (A^{-1}) is :

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{3}$

(C) $\frac{1}{6}$ (D) 1

13. (A) अनुरेख A = 6

$|A| = 12$

$\therefore$ अनुरेख $(A^{-1}) = \dfrac{\text{अनुरेख (A)}}{|A|}$

$\left[\because A^{-1} = \dfrac{A}{|A|}\right]$

$= \dfrac{6}{12} = \dfrac{1}{2}$

14. यदि $f\left(x - \frac{1}{x}\right) = x^3 - \frac{1}{x^3}$, तब $f(1)$ का मान है—

If $f\left(x - \frac{1}{x}\right) = x^3 - \frac{1}{x^3}$, then the value of $f(1)$ is :

(A) –2 (B) –1

(C) 0 (D) 4

14. (D) यहाँ $f\left(x - \frac{1}{x}\right) = x^3 - \frac{1}{x^3}$

तब $f(1)$

अर्थात् $\left(x - \frac{1}{x}\right) = 1$

या $\left(x - \frac{1}{x}\right)^3 = 1^3$

$x^3 - \frac{1}{x^3} - 3\left(x - \frac{1}{x}\right) = 1$

$x^3 - \frac{1}{x^3} - 3 = 1$

$x^3 - \frac{1}{x^3} = 4$

$\therefore\ f(1) = x^3 - \frac{1}{x^3} = 4$

$\therefore\ f(1) = 4$

15. समीकरण $|x|^2 + |x| - 6 = 0$ के लिए—

For the equation $|x|^2 + |x| - 6 = 0$:

(A) केवल एक मूल है/there is only one root

(B) मूलों का योग –1 है/the sum of roots is –1

(C) मूलों का गुणनफल – 4 है/the product of roots is – 4

(D) चार मूल हैं/there are four roots

15. (D) समीकरण $|x|^2 + |x| - 6 = 0$

प्रथम स्थिति—

$|x|^2 = x^2,\ |x| = x$ से

$x^2 + x - 6 = 0$

$(x + 3)(x - 2) = 0$

$x = -3, 2$

द्वितीय स्थिति—

$|x|^2 = x^2$ व $|x| = -x$ से

$x^2 - x - 6 = 0$

$(x + 2)(x - 3) = 0$

$x = 3, -2$

अतः समीकरण के चार मूल हैं।

16. यदि समीकरण $(a-b)x^2+(c-a)x+(b-c)=0$ के मूल बराबर हों, तो a, b, c हैं—

If the roots of the equation $(a-b)x^2+(c-a)x+(b-c)=0$ are equal, a, b, c are in :

(A) समान्तर श्रेढ़ी में/arithmetic progression

(B) गुणोत्तर श्रेढ़ी में/geometric progression

(C) हरात्मक श्रेढ़ी में/harmonic progression

(D) उपर्युक्त में से कोई नहीं/None of the above

16. (A) समी. $(a-b)x^2+(c-a)x+(b-c)=0$ में

माना $A=(a-b)$

$B=(c-a)$

$C=(b-c)$

व मूल बराबर हैं तब

$D = 0$

$B^2 = 4AC$

$(c-a)^2 = 4(a-b)(b-c)$

$\therefore c^2+a^2-2ac = 4[ab-ac-b^2+bc]$

$c^2+a^2-2ac = 4ab-4ac-4b^2+4bc$

$c^2+a^2+2ac+4b^2-4b(a+c) = 0$

या $(c+a)^2+(2b)^2-2\times(2b)\times(c+a) = 0$

या $(c+a-2b)^2 = 0$

या $(c+a-2b) = 0$

अर्थात् $2b = a+c$

अतः a, b, c समान्तर श्रेढ़ी में हैं।

17. यदि $f(x) = \cos|x|$ और $g(x) = \sin|x|$, तो—

If $f(x) = \cos|x|$ and $g(x) = \sin|x|$, then :

(A) f और g दोनों सम फलन हैं/both f and g are even functions

(B) f और g दोनों विषम फलन हैं/both f and g are odd functions

(C) f एक सम फलन तथा g एक विषम फलन है/f is an even function and g is an odd function

(D) f एक विषम फलन तथा g एक सम फलन है/f is an odd function and g is an even function

17. (A) $f(x) = \cos|x|$ व $g(x) = \sin|x|$

$\therefore$ $x = -x$ पर

$f(x) = \cos|-x| = \cos x$

व $g(x) = \sin|-x| = \sin x$

अर्थात् $f(x)$ व $g(x)$ दोनों समफलन हैं।

18. यदि $f(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ x & x^2 & 1 \\ x^2 & 1 & x \end{vmatrix}$ तो $f\left(\sqrt[3]{3}\right)$ का मान है—

If $f(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ x & x^2 & 1 \\ x^2 & 1 & x \end{vmatrix}$ then the value of $f\left(\sqrt[3]{3}\right)$ is :

(A) -6 (B) 6

(C) 4 (D) -4

18. (D) $f(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ x & x^2 & 1 \\ x^2 & 1 & x \end{vmatrix}$

$f(x) = 1(x^3-1) - x(x^2-x^2) + x^2(x-x^4)$

$f(x) = x^3-1+x^3-x^6$

$f(x) = 2x^3-x^6-1$

$x = \sqrt[3]{3}$ या $(3)^{1/3}$ रखने पर

$f\left(\sqrt[3]{3}\right) = 2\left(3^{\frac{1}{3}}\right)^3 - \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^6 - 1$

$= 2\times 3 - 3^2 - 1$

$= 6 - 9 - 1$

$f\left(\sqrt[3]{3}\right) = -4$

19. मान लीजिए कि किसी समुच्चय A पर R एक सम्बन्ध है तथा मान लीजिए कि I_A, A पर तत्समक सम्बन्ध को दर्शाता है। तब R प्रतिसममित है, यदि और केवल यदि—

Let R be a relation on a set A and let I_A denote the identity relation on A. Then R is antisymmetric, if and only if :

(A) $R = R^{-1}$

(B) $R \cup R^{-1} \subseteq I_A$

(C) $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$

(D) उपर्युक्त में से कोई नहीं/None of the above

19. (D) माना A एक अरिक्त समुच्चय है तथा I_A, A में एक सम्बन्ध है, जो $I_A = \{(x, y) : x, y \in A$ तथा $x = y\}$ से परिभाषित है, तब I_A. A पर एक तत्समकारी सम्बन्ध कहलाता है स्वष्ट है कि, एक समुच्चय में एक तत्समकारी समबन्ध $A \times A$ में उन सभी क्रमित युग्मों (x, y) या समुच्चय होता है जिनमें लिए $x = y$

अतः किसी समुच्चय A पर परिभाषित R प्रतिसममित कहलाता है, यदि xRy तथा $yRx \Rightarrow x = y$, जबकि $x, y \in A$

अथवा $(x, y)R$ तथा $(y, x)R \Rightarrow x = y$

अर्थात् x, y में सम्बन्ध तथा y, x में सम्बन्ध तभी सत्य होगा जबकि $x = y$

अतः विकल्प (D) सही है।

20. यदि एक गुणोत्तर श्रेढ़ी का प्रथम पद x तथा इसके अनन्त पदों का योगफल $\frac{1}{3}$ हो, तो x है अंतराल

If x is the first term of a geometric progression and the sum of its infinite terms is $\frac{1}{3}$, then x lies in the interval

(A) $0 < x < \frac{1}{2}$ में (B) $-1 < x < \frac{1}{4}$ में

(C) $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$ में (D) $0 < x < \frac{2}{3}$ में

20. (D) गुणोत्तर श्रेढ़ी का प्रथम पद $a = x$

व $S_\infty = \frac{1}{3}$

यदि सार्वान्तर r हो, तो

$\frac{a}{1-r} = \frac{1}{3}$

$3x = 1-r$

$r = 1-3x$

अब $|r| < 1$

$|1-3x| < 1$

अर्थात् $-1 < 1-3x < 1$

$-2 < -3x < 0$

या $2 > 3x > 0$

या $0 < x < \frac{2}{3}$

21. यदि $\sum_{n=0}^{\infty} r^n = s, |r| < 1,$ तो $\sum_{n=0}^{\infty} r^{2n}$ बराबर है—

If $\sum_{n=0}^{\infty} r^n = s, |r| < 1,$ then $\sum_{n=0}^{\infty} r^{2n}$ is equal to :

(A) $\frac{s^2}{2s+1}$ (B) $\frac{s^2}{2s-1}$

(C) $\frac{2s}{s^2-1}$ (D) s^2

21. (B) $\sum_{n=0}^{\infty} r^n = s$

अर्थात् $1 + r + r^2 + \ldots\ldots\ldots \infty = s$

$\frac{1}{1-r} = s$

$1-r = \frac{1}{s}$

$r = 1-\frac{1}{s}$

$r = \frac{s-1}{s}$

तब $\sum_{n=0}^{\infty} r^{2n} = 1 + r^2 + r^4 + \ldots\ldots\ldots \infty$

$= \frac{1}{1-r^2}$

$= \frac{1}{1-\frac{(s-1)^2}{s^2}}$

$= \frac{s^2}{s^2-(s-1)^2}$

$$= \frac{s^2}{(s+s-1)(s-s+1)}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^{2n} = \frac{s^2}{2s-1}$$

22. अनन्त श्रेणी $\frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+...\infty$ अभिसारी है, यदि–

The infinite series $\frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+...\infty$ is convergent, if :

(A) $p = 0$ (B) $p < 1$

(C) $p = 1$ (D) $p > 1$

22. (D) $\frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+.....\infty$

श्रेणी का nवाँ पद

$$U_n = \frac{1}{n^p}$$

तब $U_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^p}$

$$\therefore \frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{n^p}{(n+1)^p} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^p}$$

अभिसारी के लिए

$$\lim_{n\to\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^p} = 1$$

अतः अनुपात परीक्षण विफल होता है।

अब $V_n = \frac{1}{n^p}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{U_n}{V_n} = 1$$

परन्तु $\Sigma V_n = \sum \frac{1}{n^p}$ अभिसारी होगा

यदि $P > 1$ (P-श्रेणी परीक्षण से)

23. निम्न अनुक्रमों में से कौन-सा एक अभिसारी नहीं है ?

Which one of the following sequences is not convergent ?

(A) $\langle 1+(-1)^n \rangle$

(B) $\left\langle \frac{n}{n+1} \right\rangle$

(C) $\left\langle 1+\frac{(-1)^n}{n} \right\rangle$

(D) उपर्युक्त में से कोई नहीं/None of the above

23. (A) किसी अनन्त श्रेणी U_n के किन्हीं दो क्रमागत पदों में अभिसारी होने की शर्त

$$|a_n| > |a_{n+1}|$$

तथा $\lim_{n\to\infty} |U_n| = 0$

निम्न श्रेणियों में, $n = 1, 2, 3, ...$ के लिए

$$\langle 1+(-1)^n \rangle = \langle 0, 2, 0, 2, 0...... \rangle$$

$$\left\langle \frac{n}{n+1} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}........ \right\rangle$$

$$\left\langle 1+\frac{(-1)^n}{n} \right\rangle = \left\langle 0, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{4}...... \right\rangle$$

अतः श्रेणी $\langle 1+(-1)^n \rangle$ अभिसारी नहीं है।

24. यदि $(1 - x + x^2)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{2n}x^{2n}$ तब $(a_0 + a_2 + a_4 + ... + a_{2n})$ बराबर है–

If $(1 - x + x^2)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{2n}x^{2n}$ then $(a_0 + a_2 + a_4 + ... + a_{2n})$ is equal to :

(A) $\frac{3^n-1}{2}$ (B) $\frac{3^n+1}{2}$

(C) $\frac{3^n+2}{2}$ (D) $\frac{3^n-2}{2}$

24. (B) $(1 - x + x^2)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{2n}x^{2n}$ ...(i)

समीकरण (i) में $x = -1$ रखने पर,

$(1 + 1 + 1)^n = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + ... + a_{2n}$

$3^n = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + ... + a_{2n}$ ...(ii)

समीकरण (i) में $x = 1$ रखने पर,

$(1 - 1 + 1)^n = a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_{2n}$

$1 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{2n}$ ...(iii)

समी. (ii) व समी. (ii) को जोड़ने पर,

$3^n + 1 = 2(a_0 + a_2 + a_4 + ... + a_{2n})$

या $a_0 + a_2 + a_4 + ... a_{2n} = \frac{3^n+1}{2}$

25. एक आबेली समूह का प्रत्येक उपसमूह नहीं है–

Every subgroup of an Abelian group is not :

(A) चक्रीय/cyclic

(B) आबेली/Abelian

(C) प्रसामान्य/normal

(D) उपर्युक्त में से कोई नहीं/None of the above

25. (A) सभी चक्रीय समूह आबेली होते है, परन्तु एक आबेलीयन समूह या उपसमूह आवश्यक रूप से चक्रीय नहीं होते हैं। आबेली समूह में प्रत्येक तत्व अपने आप में एक सयुग्मन वर्ग में होता है और तालिका में एकल तत्व की घात शामिल होती है जिन्हें जनक के रूप में जाना जाता है।

26. यदि $|\vec{a}\times\vec{b}|^2 + |\vec{a}.\vec{b}|^2 = 144$ और $|\vec{a}| = 4$ हो, तो $|\vec{b}|$ बराबर है–

If $|\vec{a}\times\vec{b}|^2 + |\vec{a}.\vec{b}|^2 = 144$ and $|\vec{a}| = 4$, then $|\vec{b}|$ is equal to :

(A) 12 (B) 8

(C) 4 (D) 3

26. (D) $|\vec{a}\times\vec{b}|^2 + |\vec{a}.\vec{b}|^2 = 144$

$\left||\vec{a}|.|\vec{b}|.\sin\theta.\hat{n}\right|^2 + \left||\vec{a}|.|\vec{b}| : \cos\theta\right|^2 = 144$

या $|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 \sin^2\theta + |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\cos^2\theta = 144$ $[\because (\hat{n})^2 = 1]$

या $|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = 144$

$|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 = 144$ $(\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1)$

$\because$ $|\vec{a}| = 4$

$\therefore$ $4^2|\vec{b}|^2 = 144$

$|\vec{b}|^2 = \frac{144}{16} = 9$

$|\vec{b}| = \sqrt{9} = 3$

27. यदि $\vec{F} = x^2y\hat{i} + xz\hat{j} + 2yz\hat{k}$ हो, तो div curl $\vec{F}$ का मान है–

If $\vec{F} = x^2y\hat{i} + xz\hat{j} + 2yz\hat{k}$ then the value of div curl $\vec{F}$ is :

(A) 0 (B) 1

(C) 2 (D) 3

27. (A) $\vec{F} = x^2y\hat{i} + xz\hat{j} + 2yz\hat{k}$

$$\therefore \text{curl}\vec{F} = \nabla\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2y & xz & 2yz \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}\left[\frac{\partial}{\partial y}(2yz) - \frac{\partial}{\partial z}(xy)\right] - \hat{j}\left[\frac{\partial}{\partial x}(2yz) - \frac{\partial}{\partial z}(x^2y)\right] + \hat{k}\left[\frac{\partial}{\partial x}(xz) - \frac{\partial}{\partial y}(x^2y)\right]$$

$= \hat{i}[2z - x] - \hat{j}[0 - 0] + \hat{k}[z - x^2]$

$\therefore (2z - x)\hat{i} + (z - x^2)\hat{k}$

अब div curl $\vec{F}$ $= \nabla.(\text{Curl}\vec{F})$

$$= \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$.\left[(2z - x)\hat{i} + (z - x^2)\hat{k}\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(2z - x) + \frac{\partial}{\partial z}(z - x^2)$$

$= -1 + 1$

div curl $\vec{F} = 0$

28. यदि $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ अचर सदिश हैं, तो $\nabla\left(\left|\vec{r}, \vec{a}, \vec{b}\right|\right)$ बराबर है—

If $\vec{a}$ and $\vec{b}$ are constant vectors, then $\nabla\left(\left|\vec{r}, \vec{a}, \vec{b}\right|\right)$ is equal to :

(A) $\hat{0}$ (B) $\left(\vec{a}.\vec{b}\right)\vec{r}$

(C) $\vec{a}\times\vec{b}$ (D) $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\left|\vec{r}\right|$

28. (C) माना $\vec{a} = a_x\hat{i} + ay\hat{j} + a_z\hat{k}$

व $\vec{b} = b_x\hat{i} + b_y\hat{j} + b_z\hat{k}$

तब $\nabla\left(\left[\vec{r}.\vec{a}\vec{b}\right]\right) = \nabla\left[\vec{r}.\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\right]$

जहाँ $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

$$\therefore \quad \vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(a_y b_z - b_y a_z) - \hat{j}(a_x b_z - b_x a_z) + \hat{k}(a_x b_y - b_x a_y)$$

$$\vec{r}.\left(\vec{a}\times\vec{b}\right) = x(a_y b_z - b_y a_z) - y(a_x b_z - b_x a_z) + z(a_x b_y - b_x a_y)$$

अब $\nabla\left[\vec{r}.\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\right] = \left(\frac{\hat{i}\partial}{\partial x} + \frac{\hat{j}\partial}{\partial y} + \frac{\hat{k}\partial}{\partial z}\right)$

$[x(a_y b_z - b_y a_z) - y(a_x b_z - b_x a_z) + z(a_x b_y - b_x a_y)]$

$$= \hat{i}(a_y.b_z - b_y a_z) - \hat{j}(a_x b_z - b_x a_z) + \hat{k}(a_x b_y - b_x a_y)$$

$$\nabla\left[\vec{r}.\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\right] = \vec{a}\times\vec{b}$$

29. $\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)\times\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$ का मान है—

The value of $\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)\times\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$ is :

(A) $\hat{0}$ (B) $\left[\vec{b}\vec{c}\vec{a}\right]\vec{b}$

(C) $\left[\vec{c}\vec{a}\vec{b}\right]\vec{c}$ (D) $\left[\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right]\vec{a}$

29. (D) $\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)\times\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$

माना $\vec{c}\times\vec{a} = \vec{d}$

तब $\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)\times\left(\vec{a}\times\vec{b}\right) = \vec{d}\times\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$

$\because \vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right) = \left(\vec{a}.\vec{c}\right)\vec{b} - \left(\vec{a}.\vec{b}\right)\vec{c}$

$\therefore = \left(\vec{d}.\vec{b}\right)\vec{a} - \left(\vec{d}.\vec{a}\right)\vec{b}$

$= \left[\left(\vec{c}\times\vec{a}\right).\vec{b}\right]\vec{a} - \left[\left(\vec{c}\times\vec{a}\right).\vec{a}\right]\vec{b}$

$\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)\times\left(\vec{a}\times\vec{b}\right) = \left[\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right].\vec{a} - \left[\vec{c}\vec{a}\vec{a}\right]\vec{b}$

$= \left[\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right]\vec{a}$ $\quad \left[\because \left[\vec{c}\vec{a}\vec{a}\right] = 0\right]$

30. div$\left(\vec{r}\times\vec{a}\right)$, जहाँ $\vec{a}$ एक अचर सदिश है, बराबर है—

div$\left(\vec{r}\times\vec{a}\right)$, where $\vec{a}$ is a constant vector, is equal to :

(A) 0 (B) $\left|\vec{a}\right|$

(C) $\left|\vec{r}\right|$ (D) $\vec{a}.\vec{r}$

30. (A) माना $\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}$

व $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

$$\vec{r}\times\vec{a} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(a_y z - a_z y) - \hat{j}(a_x z - a_z x) + \hat{k}(a_x y - a_y x)$$

$$\therefore \text{div}\left(\vec{r}\times\vec{a}\right) = \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right).\left(\vec{r}\times\vec{a}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(a_y z - a_z y) - \frac{\partial}{\partial y}(a_x z - a_z x) + \frac{\partial}{\partial z}(a_x y - a_y x)$$

$= 0 - 0 + 0$

div$\left(\vec{r}\times\vec{a}\right) = 0$

31. यदि $\vec{A}$ और $\vec{B}$ अघूर्णनीय सदिश हैं, तो—

If vectors $\vec{A}$ and $\vec{B}$ are irrotational, then :

(A) $\vec{A}\times\vec{B}$ अघूर्णनीय है

$\vec{A}\times\vec{B}$ is irrotational

(B) $\vec{A}\times\vec{B}$ परिनालिकीय है

$\vec{A}\times\vec{B}$ is solenoidal

(C) $\vec{A}-\vec{B}$ घूर्णनीय है

$\vec{A}-\vec{B}$ is rotational

(D) उपर्युक्त में से कोई नहीं/None of the above

31. (B) $\vec{A}$ व $\vec{B}$ अघूर्णनीय है।

अर्थात् $\nabla\times\vec{A} = 0$ व $\nabla\times\vec{B} = 0$

या $\vec{B}.\left(\nabla\times\vec{A}\right) = 0$ ...(i)

$\vec{A}.\left(\nabla\times\vec{B}\right) = 0$ ...(ii)

घटाने पर,

$\vec{B}.\left(\nabla\times\vec{A}\right) - \vec{A}.\left(\nabla\times\vec{B}\right) = 0$ ...(iii)

$\because \vec{B}.\left(\nabla\times\vec{A}\right) - \vec{A}.\left(\nabla\times\vec{B}\right) = \nabla\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)$

[सूत्र से]

अर्थात् $\nabla.\left(\vec{A}\times\vec{B}\right) = 0$

इस प्रकार $\vec{A}\times\vec{B}$ एक परिनालिकीय है।

32. सदिश $\frac{\vec{r}}{\left|\vec{r}\right|^3}$, जहाँ $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$, है—

The vector $\frac{\hat{r}}{\left|\vec{r}\right|^3}$, where $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$, is :

(A) केवल परिनालिकीय/only solenoidal

(B) केवल अघूर्णनीय/only irrotational

(C) परिनालिकीय और अघूर्णनीय दोनों/both solenoidal and irrotational

(D) न तो परिनालिकीय, न ही अघूर्णनीय/neither solenoidal nor irrotational

32. (B) माना $\vec{A} = \frac{\hat{r}}{\left|\vec{r}\right|^3} = \frac{\vec{r}}{\left|\vec{r}\right|^4}$

$\left(\because \vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}\right)$

$$\therefore \quad \vec{A} = \frac{x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$$

अब Curl $\vec{A} = \nabla\times\vec{A}$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{x}{r^4} & \frac{y}{r^4} & \frac{z}{r^4} \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \hat{i}\left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{z}{r^4} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{y}{r^4}\right) - \hat{j}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{z}{r^4} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{x}{r^4}\right) + \hat{k}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{y}{r^4} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{x}{r^4}\right)$$

$$\Rightarrow \hat{i}\left[z.\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}\right\} - y\frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}\right\}\right]$$

$$-\hat{j}\left[\begin{matrix} z\dfrac{\partial}{\partial x}\left\{\dfrac{1}{(x^2+y^2+z^2)^2}\right\}- \\ x\dfrac{\partial}{\partial z}\left\{\dfrac{1}{(x^2+y^2+z^2)^2}\right\} \end{matrix}\right]+$$

$$\hat{k}\left[\begin{matrix} y\dfrac{\partial}{\partial x}\left\{\dfrac{1}{(x^2+y^2+z^2)^2}\right\}- \\ x\dfrac{\partial}{\partial y}\left\{\dfrac{1}{(x^2+y^2+z^2)^2}\right\} \end{matrix}\right]$$

$$\Rightarrow \hat{i}\left[\frac{z(-2)(2y)}{(x^2+y^2+z^2)^3}-\frac{y(-2)(2z)}{(x^2+y^2+z^2)^3}\right]$$

$$-\hat{j}\left[\frac{z(-2)(2x)}{(x^2+y^2+z^2)^3}-\frac{x(-2)(2z)}{(x^2+y^2+z^2)^3}\right]$$

$$+\hat{k}\left[\frac{y(-2)(2x)}{(x^2+y^2+z^2)^3}-\frac{x(-2)(2y)}{(x^2+y^2+z^2)^3}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{4}{(x^2+y^2+z^2)^3}\left[\begin{matrix}\hat{i}(yz-yz)-\hat{j}(2x-2x) \\ +\hat{k}(xy-xy)\end{matrix}\right]$$

Curl $\vec{A} = \nabla \times \vec{A} = 0$

अर्थात् सदिश $\vec{A}$ केवल अघूर्णनीय है।

33. यदि $\vec{A}\times\vec{B}=\vec{C}\times\vec{D}$ और $\vec{A}\times\vec{C}=\vec{B}\times\vec{D}$, तो सदिश $\vec{A}-\vec{D}$ और $\vec{B}-\vec{C}$ हैं–

If $\vec{A}\times\vec{B}=\vec{C}\times\vec{D}$ and $\vec{A}\times\vec{C}=\vec{B}\times\vec{D}$, then vectors $\vec{A}-\vec{D}$ and $\vec{B}-\vec{C}$ are :

(A) बराबर/equal
(B) समान्तर/parallel
(C) लम्बवत्/perpendicular
(D) 60° के कोण पर आनत/inclined at an angle of 60°

33. (B) $\vec{A}\times\vec{B} = \vec{C}\times\vec{D}$ ...(i)

$\vec{A}\times\vec{C} = \vec{B}\times\vec{D}$ ...(ii)

समी. (i) से समी. (ii) घटाने पर,

$\vec{A}\times\vec{B}-\vec{A}\times\vec{C} = \vec{C}\times\vec{D}-\vec{B}\times\vec{D}$

या $\vec{A}\times(\vec{B}-\vec{C}) = (\vec{C}-\vec{B})\times\vec{D}$

या $\vec{A}\times(\vec{B}-\vec{C})-(\vec{C}-\vec{B})\times\vec{D} = 0$

या $\vec{A}\times(\vec{B}-\vec{C})-\vec{D}\times(\vec{B}-\vec{C}) = 0$

या $(\vec{A}-\vec{D})\times(\vec{B}-\vec{C}) = 0$

$[\vec{a}\times\vec{b}=0]$

अतः सदिश $\vec{A}-\vec{D}$ व $\vec{B}-\vec{C}$ समान्तर होंगे।

34. यदि $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ असमतलीय ऐसे इकाई सदिश हैं कि $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{\sqrt{2}}$, तब $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के बीच का कोण है–

If $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ are non-coplanar unit vectors such that $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{\sqrt{2}}$, then the angle between $\vec{a}$ and $\vec{b}$ is :

(A) $\dfrac{3\pi}{4}$ (B) $\dfrac{\pi}{4}$
(C) $\dfrac{\pi}{2}$ (D) π

34. (A) $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{\sqrt{2}}$

$(\vec{a}.\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}.\vec{b})\vec{c} = \dfrac{\vec{b}}{\sqrt{2}}+\dfrac{\vec{c}}{\sqrt{2}}$

या $(\vec{a}.\vec{c})\vec{b}-\dfrac{\vec{b}}{\sqrt{2}}-\dfrac{\vec{c}}{\sqrt{2}}-(\vec{a}.\vec{b})\vec{c} = 0$

या $\left(\vec{a}.\vec{c}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\vec{b}-\left(\vec{a}.\vec{b}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\vec{c} = 0$

$\because$ $\vec{a},\vec{b}$ व $\vec{c}$ असमतलीय सदिश हैं। तब ये रैखिकीय स्वतन्त्र होंगे।

अर्थात् $\vec{a}.\vec{c}-\dfrac{1}{\sqrt{2}} = 0$

तथा $\vec{a}.\vec{b}+\dfrac{1}{\sqrt{2}} = 0$

अर्थात् $\vec{a}.\vec{b} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\because$ $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}| = 1$

(तीनों इकाई सदिश हैं।)

$\therefore$ $|a|.|b|.\cos\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\cos\theta = \cos\dfrac{3\pi}{4}$

$\theta = \dfrac{3\pi}{4}$

35. यदि $\vec{V}_1,\vec{V}_2,\vec{V}_3$ तीन ऐसे अशून्य सदिश हों कि $\vec{V}_1\times\vec{V}_2=\vec{V}_3$, $\vec{V}_2\times\vec{V}_3=\vec{V}_1$, तो–

If $\vec{V}_1,\vec{V}_2,\vec{V}_3$ are three non-zero vectors such that $\vec{V}_1\times\vec{V}_2=\vec{V}_3$, $\vec{V}_2\times\vec{V}_3=\vec{V}_1$, then–

(A) $|\vec{V}_1|=|\vec{V}_2|$ (B) $|\vec{V}_2|=|\vec{V}_3|$
(C) $|\vec{V}_1|=|\vec{V}_3|$ (D) $\vec{V}_2=\vec{V}_1\times\vec{V}_3$

35. (C) $\vec{V}_1\times\vec{V}_2 = \vec{V}_3$ ...(i)

और $\vec{V}_2\times\vec{V}_3 = \vec{V}_1$ ...(ii)

समी. (i) व (ii) से स्पष्ट है कि $\vec{V}_3,\vec{V}_1$ व $\vec{V}_2$ के लम्बवत् है और $\vec{V}_1,\vec{V}_2$ व $\vec{V}_3$ के लम्बवत् है।

अर्थात् $\vec{V}_1,\vec{V}_2$ व $\vec{V}_3$ परस्पर लम्बवत् हैं।

अतः समी. (i) व (ii) से,

$|\vec{V}_1|.|\vec{V}_2|\sin 90° = |\vec{V}_3|$

या $|\vec{V}_1|.|\vec{V}_2| = |\vec{V}_3|$ ...(iii)

तथा $|\vec{V}_2|.|\vec{V}_3|\sin 90° = |\vec{V}_1|$

या $|\vec{V}_2|.|\vec{V}_3| = |\vec{V}_1|$ ...(iv)

समी. (iii) व (iv) का भाग करने पर,

$\dfrac{|\vec{V}_1||\vec{V}_2|}{|\vec{V}_2||\vec{V}_3|} = \dfrac{|\vec{V}_3|}{|\vec{V}_1|}$

$\therefore$ $|\vec{V}_1|^2 = |\vec{V}_3|^2$

$\Rightarrow$ $|\vec{V}_1| = |\vec{V}_3|$

36. समीकरण $\left|\dfrac{z-3}{z+3}\right|=2$ व्यक्त करता है–

The equations $\left|\dfrac{z-3}{z+3}\right|=2$ represents :

(A) एक परवलय/a parabola
(B) एक अतिपरवलय/a hyperbola
(C) एक वृत्त/a circle
(D) एक दीर्घवृत्त/an ellipse

36. (C) $\left|\dfrac{z-3}{z+3}\right| = 2$

$z = x + iy$ रखने पर

$\left|\dfrac{x+iy-3}{x+iy+3}\right| = 2$

या $\sqrt{\dfrac{(x-3)^2+y^2}{(x+3)^2+y^2}} = 2$

या $(x-3)^2+y^2 = 4[(x+3)^2+y^2]$

(वर्ग करने पर)

$x^2+9-6x+y^2 = 4x^2+36+24x+4y^2$

$\therefore 3x^2+3y^2+30x+27 = 0$

या $x^2+y^2+10x+9 = 0$

अतः उक्त समीकरण एक वृत्त को प्रदर्शित करता है।

37. यदि $x_n = \cos\left(\dfrac{\pi}{2^n}\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{2^n}\right), n\in N$, तो $\lim\limits_{n\to\infty}(x_1.x_2.x_3......x_n)$ है–

If $x_n = \cos\left(\dfrac{\pi}{2^n}\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{2^n}\right), n\in N$, then $\lim\limits_{n\to\infty}(x_1.x_2.x_3......x_n)$ is :

(A) 0 (B) –1
(C) 1 (D) 2

37. (B) $x_n = \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$

तब $\lim_{n\to\infty}(x_1 x_2 x_3 .... x_n)$

$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right).\cos\left(\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)....\infty\right]$

$= \lim_{n\to\infty}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8} + ...n\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} ....n\right)\right]$

= (डिमायवर प्रमेय से)

$= \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8} + ...\infty\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8} + ...\infty\right)$

$= \cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}}{1-\frac{1}{2}}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}}{1-\frac{1}{2}}\right)$

(गुणोत्तर श्रेढ़ी के अनन्त पदों का योग)

$= \cos(\pi) + i\sin(\pi)$

$= -1 + 0$

$= -1$

38. यदि $f(z) = \begin{cases} u\{x, y\} + iv\{x, y\}, & z \neq 0 \text{ पर} \\ 0, & z = 0 \text{ पर} \end{cases}$

जहाँ $u(x, y) = \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}$, $v(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$,

तो $\lim_{z\to 0}\frac{f(z) - f(0)}{z - 0}$ का मान, $y = x$ के लिए होगा—

If $f(z) = \begin{cases} u\{x, y\} + iv\{x, y\}, & z \neq 0 \\ 0, & z = 0 \end{cases}$ where

$u(x, y) = \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}$, $v(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$, then

the value of $\lim_{z\to 0}\frac{f(z) - f(0)}{z - 0}$, along $y = x$, will be :

(A) $1 - i$ (B) $\frac{1-i}{2}$

(C) $1 + i$ (D) $\frac{1+i}{2}$

38. (D) $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$

$f(z) = \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} + i\left(\frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}\right)$

अतः $\frac{f(z) - f(0)}{z - 0}$

$= \frac{\frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} + \frac{i(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2} - 0}{x + iy - 0}$

$(\because f(0) = 0)$

$= \frac{x^3 - y^3 + i(x^3 + y^3)}{(x^2 + y^2)(x + iy)}$

अब $\lim_{z\to\infty}\frac{f(z) - f(0)}{z - 0}$

$= \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^3 - y^3 - i(x^3 + y^3)}{(x^2 + y^2)(x + iy)}$

$y = x$ के लिए

$\lim_{z\to\infty}\frac{f(2) - f(0)}{z - 0}$

$= \lim_{x\to 0}\frac{x^3 - x^3 + i(x^3 + x^3)}{(x^2 + x^2)(x + ix)}$

$= \lim_{x\to 0}\frac{2x^3 i}{2x^3(1 + i)} = \frac{i}{1 + i} \times \frac{1 - i}{1 - i}$

$= \frac{i - i^2}{i - i^2} = \frac{1 + i}{1 + 1} = \frac{1 + i}{2}$

39. यदि $a = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}$ हो, तब $\left(\frac{1 + a}{2}\right)^{3n}$ का मान है—

If $a = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}$, then the value of $\left(\frac{1 + a}{2}\right)^{3n}$ is :

(A) $(-1)^n$ (B) $\frac{1}{2^{3n}}$

(C) $\frac{(-1)^n}{2^{3n}}$ (D) $(-1)^n + 1$

39. (C) $a = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}$

मान रखने पर,

$a = -\frac{1}{2} - i.\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \left(\frac{1 + a}{2}\right)^{3n} = \left(\frac{1 - \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}}{2}\right)^{3n}$

$= \left(\frac{\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}}{2}\right)^{3n}$

$= \left(\frac{\cos\left(\frac{-\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{3}\right)}{2}\right)^{3n}$

$= \frac{\cos\left(\frac{-3n\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{-3n\pi}{3}\right)}{2^{3n}}$

(डिमायवर प्रमेय से)

$= \frac{\cos n\pi - i\sin n\pi}{2^{3n}}$

$= \left(\frac{\cos\pi - i\sin\pi}{2^3}\right)^n$

$= \left(\frac{-1 - i \times 0}{2^3}\right)^n = \frac{(-1)^n}{2^{3n}}$

40. यदि $\omega(\neq 1)$ इकाई का घनमूल हो, तो $(1 + \omega^2 + 2\omega)^{3n} - (1 + \omega + 2\omega^2)^{3n}$ का मान है—

If $\omega(\neq 1)$ is cube root of unity, then the value of $(1 + \omega^2 + 2\omega)^{3n} - (1 + \omega + 2\omega^2)^{3n}$ is :

(A) 0 (B) 1

(C) ω (D) ω^2

40. (A) $(1 + \omega^2 + 2\omega)^{3n} - (1 + \omega + 2\omega^2)^{3n}$

$\because$ ω इकाई का घनमूल है।

अर्थात् $\omega^3 = 1$

व $1 + \omega + \omega^2 = 0$

या $1 + \omega = -\omega^2$

तथा $1 + \omega^2 = -\omega$

$\Rightarrow (1 + \omega^2 + 2\omega)^{3n} - (1 + \omega + 2\omega^2)^{3n}$

$= (-\omega + 2\omega)^{3n} - (-\omega^2 + 2\omega^2)^{3n}$

$= (\omega)^{3n} - (\omega^2)^{3n}$

$= (\omega^3)^n - (\omega^3)^{2n}$

$= 1 - 1$

$= 0$

41. यदि θ वास्तविक है, तो—

If θ is real, then :

(A) $\cos(i\theta) = i\cosh\theta$

(B) $\sin(i\theta) = i\sinh\theta$

(C) $\tan(i\theta) = \tanh\theta$

(D) $\cot(i\theta) = i\coth\theta$

41. (B) $\because$ $\sin\theta = \frac{e^{\theta i} - e^{-i\theta}}{2i}$

व $\sinh\theta = \frac{e^{\theta} + e^{-\theta}}{2}$

तब $\sin i\theta = \frac{e^{+\theta i^2} + e^{-i^2\theta}}{2i}$

$= \frac{i}{i} \times \frac{e^{-\theta} - e^{\theta}}{2i} = \frac{i(e^{\theta} - e^{-\theta})}{2}$

$\sin i\theta = i\sinh\theta$

42. यदि $z = x + iy$, जहाँ $i = \sqrt{-1}$, तो $\left|\frac{z - 3}{z + 3}\right| = 2$ एक वृत्त निरूपित करता है, जिसका केन्द्र और जिसकी त्रिज्या है, क्रमशः

If $z = x + iy$, where $i = \sqrt{-1}$, then $\left|\frac{z - 3}{z + 3}\right| = 2$ represents a circle, whose centre and radius, respectively, are :

(A) (5, 0), 5 (B) (–5, 0), 2

(C) (–5, 0), 3 (D) (–5, 0), 4

42. (D) $\because$ $z = x + iy$

व $\left|\frac{z - 3}{z + 3}\right| = 2$

तब $\left|\frac{x + iy - 3}{x + iy + 3}\right| = 2$

या $\sqrt{\dfrac{(x-3)^2+y^2}{(x+3)^2+y^2}} = 2$

वर्ग करने पर,

$(x-3)^2+y^2 = 4[(x+3)^2+y^2]$

$x^2+9-6x+y^2 = 4x^2+4y^2+36+24x$

या $3x^2+3y^2+30x+27=0$

या $x^2+y^2+10x+9=0$

समीकरण की तुलना,

$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ से करने पर

$g=5, f=0, c=9$

$\therefore$ केन्द्र $=(-g,-f)=(-5,0)$

त्रिज्या $=\sqrt{g^2+f^2-c} = \sqrt{25+0-9}$

$=\sqrt{16}$

$=4$

43. यदि $\omega(\neq 1)$ इकाई का घनमूल हो, तो $\{(1-\omega+\omega^2)^5+(1+\omega-\omega^2)^5-32\}$ का मान है–

If $\omega(\neq 1)$ is a cube root of unity, then the value of $\{(1-\omega+\omega^2)^5+(1+\omega-\omega^2)^5-32\}$ is :

(A) 0 (B) -32

(C) 32 (D) -64

43. (A) $[1-\omega+\omega^2]^5+[1+\omega-\omega^2]^5-32$ का मान

$\because$ ω इकाई का घनमूल है

अर्थात् $\omega^3=1$

व $1+\omega+\omega^2=0$

या $1+\omega=-\omega^2$

तथा $1+\omega^2=-\omega$

$\therefore [1+\omega^2-\omega]^5+[1+\omega-\omega^2]^5-32$

$\Rightarrow [-\omega-\omega]^5+[-\omega^2-\omega^2]-32$

$\Rightarrow (-2\omega)^5+(-2\omega^2)^5-32$

$=-32\omega^5-32\omega^{10}-32$

$=-32(\omega^5+\omega^{10}+1)$

$=-32(\omega^3.\omega^2+\omega^9.\omega+1)$

$=-32(\omega^2+\omega+1)$ $[\because \omega^9=1, \omega^3=1]$

$=-32\times 0$

$=0$

44. $\sqrt{3-4i}$ का मान है–

The value of $\sqrt{3-4i}$ is :

(A) $2+i$ (B) $1+i$

(C) $1-i$ (D) $2-i$

44. (D) माना $\sqrt{3-4i}=x+iy$

वर्ग करने पर,

$3-4i=x^2+i^2y^2+2ixy$

$3-4i=x^2-y^2+i.(2xy)$

तुलना करने पर,

$x^2-y^2=3$ ...(i)

व $2xy=-4$ ...(ii)

$\because$ $x^2+y^2=\sqrt{(x^2-y^2)^2+4x^2y^2}$

(सूत्र से)

$x^2+y^2=\sqrt{(3)^2+(-4)^2}$

$=\sqrt{9+16}$

$x^2+y^2=5$ ...(iii)

समी. (i) व (iii) को जोड़ने पर,

$x^2-y^2=3$ ...(i)

$x^2+y^2=5$ ...(iii)

जोड़ने पर,

$2x^2=8$

$x^2=4$

$x=\pm 2$

व घटाने पर,

$x^2-y^2=3$

$x^2+y^2=5$

$-\quad-\quad-$

$-2y^2=-2$

$y^2=1$

$y=\pm 1$

$\sqrt{3-4i}=\pm 2\mp i$

अर्थात् $2-i$ या $-2+i$

45. यदि $\cos(x+iy)=\cos\alpha+i\sin\alpha$, तो $(\cosh 2y+\cos 2x)$ का मान है–

If $\cos(x+iy)=\cos\alpha+i\sin\alpha$, then the value of $(\cosh 2y+\cos 2x)$ is :

(A) 1 (B) 2

(C) -2 (D) $\sqrt{2}$

45. (B) $\cos(x+iy)=\cos\alpha+i\sin\alpha$

या $\cos(x+iy)=e^{i\alpha}$ ...(i)

तब $\cos(x-iy)=e^{-i\alpha}$ ...(ii)

समी. (i) व (ii) का गुणा करने पर,

$\cos(x+iy)\cos(x-iy)=e^{i\alpha}.e^{-i\alpha}$

या $2\cos(x+iy)\cos(x-iy)=1\times 2$

(2 का गुणा)

या $\cos(x+iy+x-iy)+\cos(x+iy-x+iy)=2$

$\cos 2x+\cos i(2y)=2$

$\because \cos i\theta=\cosh\theta$

अर्थात् $\cosh 2y+\cos 2x=2$

46. $z=-8i$ के तीन घनमूल हैं–

The three cube roots of $z=-8i$ are :

(A) $2i, -\sqrt{3}-i, \sqrt{3}-i$

(B) $-2i, -\sqrt{3}-i, \sqrt{3}-i$

(C) $2i, -\sqrt{3}-i, \sqrt{3}+i$

(D) $2i, \sqrt{3}-i, -\sqrt{3}+i$

46. (B) $z=-8i$ के घनमूल

माना $w=(z)^{1/3}$

$w=(-8i)^{1/3}$

$w=(-8)^3(i)^{1/3}$

$$w=-2\left[\cos\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)\right]^{\frac{1}{3}}$$

$$\left[\because i=\cos\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

डिमायवर प्रमेय से,

$$w_n=-2\left[\cos\left(\frac{2n\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{2n\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$n=0$ पर

$$w_0=-2\left[\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right]$$

$$=-2\left[\frac{\sqrt{3}}{2}+i.\frac{1}{2}\right]$$

$w_0=-\sqrt{3}-i$

$n=1$ पर

$$w_1=-2\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$w_1=-2\left[\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right]$$

$$=-2\left[\frac{-\sqrt{3}}{2}+i.\frac{1}{2}\right]$$

$w_1=\sqrt{3}-i$

$n=2$ पर

$$w_2=-2\left[\cos\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$w_2=-2\left[\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right]$$

$=-2[0+i(-1)]$

$w_2=2i$

अतः z के तीन घनमूल $2i, -\sqrt{3}-i$ व $\sqrt{3}-i$ हैं।

47. यदि $\text{Im}\left(\dfrac{z-1}{2z+1}\right)=-4$ हो, तो z का बिन्दुपथ है–

If $\text{Im}\left(\dfrac{z-1}{2z+1}\right)=-4$ then the locus of z is :

(A) एक दीर्घवृत्त/an ellipse

(B) एक परवलय/a parabola

(C) एक सरल रेखा/a straight line

(D) एक वृत्त/a circle

47. (D) $\text{Im}\left(\dfrac{z-1}{2z+1}\right) = -4$

$z = x + iy$ रखने पर,

$$\text{Im}\left[\frac{x+iy-1}{2(x+iy)+1}\right] = -4$$

$$\text{Im}\left[\frac{(x-1)+iy}{(2x+1)+i(2y)}\right] = -4$$

$$\text{Im}\left[\frac{(x-1)+2y}{(2x+1)+i(2y)} \times \frac{(2x+1)-i(2y)}{(2x+1)-i(2y)}\right] = -4$$

(हर का परिमेय करण करने पर)

$$\text{Im}\left[\frac{(x-1)(2x+1)-i2y(x-1) + iy(2x+1)-i^2 2y^2}{(2x+1)^2+4y^2}\right] = -4$$

$$\therefore \text{Im}\left[\frac{(x-1)(2x+1)+2y^2}{(2x+1)^2+4y^2} + \frac{\{(2x+1)y-2y(x-1)\}i}{(2x+1)^2+4y^2}\right] = -4$$

अर्थात् $\dfrac{(2x+1)y-2y(x-1)}{(2x+1)^2+4y^2} = -4$

$2xy + y - 2xy + 2y = -4[4x^2 + 1 + 4x + 4y^2]$

या $-3y = 16x^2 + 16y^2 + 16x + 4$

या $16x^2 + 16y^2 + 16x + 3y + 4 = 0$

या $x^2 + y^2 + x + \dfrac{3}{16}y + \dfrac{1}{4} = 0$

उक्त समीकरण एक वृत्त को प्रदर्शित करता है।

48. यदि $f(z) = (x^2 + ay^2) + ibxy$, $z = x + iy$ का एक सम्मिश्र वैश्लेषिक फलन हो, तो $a + b$ का मान है—

If $f(z) = (x^2 + ay^2) + ibxy$ is a complex analytic function of $z = x + iy$, then the value of $a + b$ is :

(A) 0 (B) 1

(C) –1 (D) 2

48. (B) $f(z) = (x^2 + ay^2) + ibxy$

माना $u = x^2 + ay^2$

$v = bxy$

क्योंकि $f(z)$ एक सम्मिश्र वैश्लैषिक फलन है

अर्थात् $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$

तथा $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$

$\therefore$ $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}(x^2+ay^2) = 2x$

$\dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}(bxy) = bx$

$\therefore$ $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$

$2x = bx$

या $b = 2$

तथा $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}(x^2+ay^2) = 2ay$

$\dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}(bxy) = by$

$\therefore$ $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial v}{\partial x}$

$\Rightarrow$ $2ay = -by$

$2a = -2$

$a = -1$

$\therefore$ $a + b = -1 + 2$

$a + b = 1$

49. निम्नलिखित में से कौन-सा एक गलत है ?

Which one the following is false ?

(A) $f(z) = \bar{z}$ कहीं भी वैश्लेषिक नहीं है/ $f(z) = \bar{z}$ is nowhere analytic

(B) $f(z) = z^2$ सर्वत्र वैश्लेषिक है/$f(z) = z^2$ is analytic everywhere

(C) $f(z) = |z|^2$, $z = 0$ पर वैश्लेषिक है/ $f(z) = |z|^2$ is analytic at $z = 0$

(D) $f(z) = e^z$ सर्वत्र वैश्लेषिक है/$f(z) = e^z$ is analytic everywhere

49. (C) विकल्प (A) से,

$f(z) = \bar{z} = x - iy$

यहाँ $u = x, v = -y$

अब $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 1$ व $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -1$

$\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$ व $\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0$

यहाँ $\dfrac{\partial u}{\partial x} \neq \dfrac{\partial v}{\partial y}$

अतः $f(z) = \bar{z}$ वैश्लेषिक नहीं है क्योंकि यह C – R समीकरण को सन्तुष्ट नहीं करता है।

विकल्प (B) से, $f(z) = z^2 = (x + iy)^2$

$f(z) = x^2 - y^2 + i(2xy)$

यहाँ $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$

अब $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x$, $\dfrac{\partial v}{\partial y} = 2x$

तथा $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -2y$ व $\dfrac{\partial v}{\partial x} = 2y$

यहाँ $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$

तथा $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$

अतः $f(z) = z^2$ सर्वत्र वैश्लेषिक है क्योंकि यह C – R समीकरण को सन्तुष्ट करता है।

विकल्प (C) से, $f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$

यहाँ $u = x^2 + y^2$, $v = 0$

अब $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x$, $\dfrac{\partial v}{\partial y} = 0$

व $\dfrac{\partial u}{\partial y} = 2y$, $\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0$

यहाँ $\dfrac{\partial u}{\partial x} \neq \dfrac{\partial v}{\partial y}$; अर्थात् $f(z) = |z|^2$, $z = 0$ पर वैश्लेषिक नहीं है।

विकल्प (D) से,

$f(z) = e^z = e^{x+iy}$

$= e^x.[\cos y + i\sin y]$

यहाँ $u = e^x \cos y$

व $v = e^x \sin y$

अब $\dfrac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y$

व $\dfrac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y$

तथा $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y$

व $\dfrac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y$

यहाँ $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$

तथा $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial u}{\partial x}$

अतः $f(z) = e^z$ सर्वत्र वैश्लेषिक है।

50. $z \in C$ के लिए असमिका $|z + i| > |z - i|$ है—

For $z \in C$, the inequality $|z + i| > |z - i|$ is :

(A) हमेशा सत्य/always true

(B) कभी भी सत्य नहीं/never true

(C) Re $z > 0$ के लिए सत्य/true for Re $z > 0$

(D) Im $z > 0$ के लिए सत्य/true for Im $z > 0$

50. (D) $|z + i| > |z - i|$

$z = x + iy$ रखने पर,

$\therefore$ $|x + iy + i| > |x + iy - i|$

$|x + i(y + 1)| > |x + i(y - 1)|$

या $\sqrt{x^2+(y+1)^2} > \sqrt{x^2+(y-1)^2}$

वर्ग करने पर,

$x^2 + (y + 1)^2 > x^2 + (y - 1)^2$

$y^2 + 1 + 2y > y^2 + 1 - 2y$

या $4y > 0$

$y > 0$

अतः Im $z > 0$ के लिए सत्य है।

51. $\displaystyle\int_{-3}^{3} \frac{x^2}{1+3^x} dx$ का मान है—

The value of $\displaystyle\int_{-3}^{3} \frac{x^2}{1+3^x} dx$ is :

(A) $\dfrac{1}{3}$ (B) $\dfrac{1}{9}$

(C) 3 (D) 9

51. (D) माना I = $\displaystyle\int_{-3}^{3} \frac{x^2 dx}{1+3^x}$ ...(i)

$x = t$ रखने पर,

$$I = \int_{-3}^{3} \frac{t^2 db}{1+3^t} \quad \text{...(ii) (प्रगुण 2 से)}$$

$x = -t$ रखने पर

$dx = -\,dt$

तथा $x = -3$ पर $t = 3$

$x = 3$ पर $t = -3$

$$I = -\int_{3}^{-3} \frac{t^2 dt}{1+3^{-t}}$$

$$I = \int_{-3}^{3} \frac{3^t t^2 dt}{1+3^t} \quad \text{...(iii)}$$

समी. (ii) व (iii) को जोड़ने पर,

$$2I = \int_{-3}^{3} \frac{t^2(1+3^t)dt}{1+3^t}$$

$$2I = \int_{-3}^{3} t^2 dt = \frac{1}{2}\left[t^3\right]_{-3}^{3}$$

$$= \frac{1}{3}\left[3^3 + 3^3\right]$$

$$2I = \frac{1}{3} \times 54$$

$\Rightarrow \quad I = 9$

52. वक्रों $y = \sin x$, $y = \cos x$ और y-अक्ष द्वारा परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल है—

The area bounded by the curves $y = \sin x$, $y = \cos x$ and y-axis is :

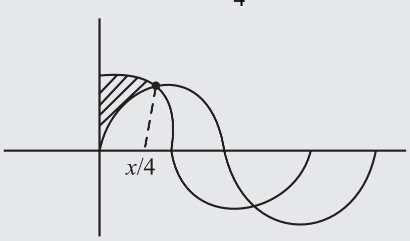
(A) $\sqrt{2}+1$ (B) $\sqrt{2}-1$

(C) $2\left(\sqrt{2}-1\right)$ (D) $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$

52. (B) $y = \sin x$ ...(i)

$y = \cos x$ ...(ii)

वक्रों की सीमा $y = 0, \frac{\pi}{4}$



वक्रों व y-अक्ष के बीच घिरा क्षेत्रफल

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x)dx$$

$$A = \left[\sin x + \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$A = \sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4} - \sin 0 - \cos 0$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - 1$$

$$A = \frac{2}{\sqrt{2}} - 1$$

$$A = \sqrt{2} - 1$$

53. यदि $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{ax+b}-3}{x-2} = \frac{1}{2}$ हो, तो a, b का मान होगा—

If $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{ax+b}-3}{x-2} = \frac{1}{2}$, then the value of a, b will be :

(A) $a = b = 3$ (B) $a \neq b$

(C) $a = 0, b = 4$ (D) $a = 2, b = 1$

53. (A) $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{ax+b}-3}{x-2} = \frac{1}{2}$

सीमा का मान रखने पर,

$$\frac{\sqrt{2a+b}-3}{0} = \frac{1}{2}$$

या $\sqrt{2a+b} - 3 = 0$

$\sqrt{2a+b} = 3$

या $2a + b = 9$ ...(i)

तथा L'HOSPITAL नियम से,

$$\lim_{x\to 2} \frac{\frac{d}{dx}\left(\sqrt{ax+b}-3\right)}{\frac{d}{dx}(x-2)} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{\frac{1}{2\sqrt{ax+b}} \times a - 0}{1} = \frac{1}{2}$$

या $\frac{a}{2\sqrt{2a+b}} = \frac{1}{2}$

या $a = \sqrt{2a+b}$

समी. (i) से,

$a = \sqrt{9}$

$a = 3$

तथा पुनः समीकरण (i) से,

$2 \times 3 + b = 9$

$b = 3$

अतः $a = b = 3$

54. निम्नलिखित कथनों पर विचार कीजिए—

Consider the following statements :

I. $y = |x|$, $x = 0$ पर अवकलनीय है/$y = |x|$ is differentiable at $x = 0$

II. $y = x|x|$ सर्वत्र अवकलनीय है/$y = x|x|$ is differentiable everywhere

उपर्युक्त कथनों में से कौन-सा/से सत्य है/हैं?/Which of the above statements is/are true?

(A) केवल I/Only I

(B) केवल II/Only II

(C) I और II दोनों/Both I and II

(D) न तो I न ही II/Neither I nor II

54. (B) I. $y = |x|$, $x = 0$ पर अवकलनीयता की जाँच

माना $f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

अब $Rf'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{0+h-0}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1$$

और $Lf'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0-h)-f(0)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{0-h-0}{h} = \lim_{h\to 0}(-1)$$

$= -1$

$\because \quad Rf'(0) \neq Lf'(0)$

अतः $y = |x|$, $x = 0$ पर अवकलनीय नहीं है।

II. $y = x|x|$ की $x = a$ (जहाँ $a \in R$) पर अवकलनीयता की जाँच

माना $f(x) = x|x| = \begin{cases} +x^2, & x \geq a \\ -x^2, & x < a \end{cases}$

अब $Rf'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(a+h)^2 - a^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{a^2 + h^2 + 2ah - a^2}{h}$$

$= 2a$

तथा $Lf'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a-h)-f(a)}{-h}$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(a-h)^2 - a^2}{-h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{a^2 + h^2 - 2ah - a^2}{-h}$$

$$= \frac{-2a}{-1} = 2a$$

यहाँ $Rf'(a) = Lf'(a)$

अतः $y = x|x|$ सर्वत्र अवकलनीय है।

55. यदि $\frac{1}{u} = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, तो

$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z}$ बराबर है—

If $\frac{1}{u} = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$,

then $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z}$ is equal :

(A) 0 (B) $2u$

(C) $-u$ (D) u^2

55. (C) $$\frac{1}{u} = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$u = \left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{-1}{2}}$$

तब $$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-1\times 2x}{2(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{-x}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

तथा $$x\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-z^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}} \quad ...(i)$$

इसी प्रकार,

$$y\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-y^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}} \quad ...(ii)$$

तथा $$z\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{-z^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}} \quad ...(iii)$$

समी. (i), (ii) व (iii) को जोड़ने पर,

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{-\left(x^2+y^2+z^2\right)}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{-1}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

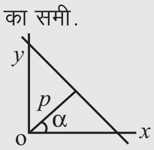
$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z} = -u$$

56. मूलबिन्दु से नियत दूरी p पर सरल रेखाओं का अवकल समीकरण है—

The differential equation of the straight lines at a fixed distance p from the origin is :

(A) $(xy'-y)^2 = p^2(1+y'^2)$
(B) $(xy'+y)^2 = p^2(1+y'^2)$
(C) $(x-yy')^2 = p^2(1+y'^2)$
(D) $(x-yy')^2 = p^2(1+y'^2)$

56. (A) मूल बिन्दु से p लम्ब दूरी के लिए सरल रेखा का समी.



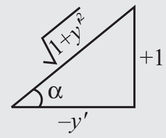
$$x\cos\alpha + y\sin\alpha = p \quad ...(i)$$

जहाँ α लम्ब का x-अक्ष से झुकाव है।

समी. (i) का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\cos\alpha + \sin\alpha\frac{dy}{dx} = 0$$

या $$\cos\alpha = -\sin\alpha . y' \quad \left(\frac{dy}{dx} = y'\right)$$



$\therefore$ $$-y' = \cot\alpha$$

$\therefore$ $$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+(y')^2}}$$

$$\cos\alpha = \frac{-y'}{\sqrt{1+(y')^2}}$$

समी. (i) से,

$$\frac{-xy'}{\sqrt{1+(y')^2}} + \frac{y}{\sqrt{1+(y')^2}} = p$$

या $$xy'-y = -p\left(\sqrt{1+y'^2}\right)$$

वर्ग करने पर,

$$(xy'-y)^2 = p^2(1+y'^2)$$

57. अवकल समीकरण $y - x\frac{dy}{dx} = a\left(y^2+\frac{dy}{dx}\right)$ का हल है—

The solution of the differential equation $y - x\frac{dy}{dx} = a\left(y^2+\frac{dy}{dx}\right)$ is :

(A) $(x+a)(1-ay) = cy$
(B) $(x+a)(1+ay) = cy$
(C) $(x+a)(1+ay) = cx$
(D) $(y+a)(1+ax) = cy$

57. (A) $$y - x\frac{dy}{dx} = a\left(y^2+\frac{dy}{dx}\right)$$

$$y - x\frac{dy}{dx} - a\frac{dy}{dx} = ay^2$$

$$\frac{dy}{dx}(x+a) = y - dy^2$$

या $$\frac{dy}{y(1-ay)} = \frac{dx}{x+a}$$

$$\left(\frac{a}{1-ay}+\frac{1}{y}\right)dy = \frac{dx}{x+a}$$

(आंशिक भिन्न करने पर)

दोनों ओर समाकलन करने पर,

$$\left(\frac{a}{1-ay}+\frac{1}{y}\right)dy = \frac{dx}{x+a}$$

$$\frac{a\log(1-ay)}{-a} + \log y = \log(x+a) + \log c'$$

(जहाँ $\log c'$ एक अचर है)

या $$\log\left(\frac{y}{1-ay}\right) = \log[c'(x+a)]$$

या $$\frac{y}{1-ay} = c'(x+a)$$

(Antilog लेने पर)

या $$(x+a)(1-ay) = \frac{y}{c'}$$

या $$(x+a)(1-ay) = cy \qquad \left(c' = \frac{1}{c}\right)$$

58. $[1, 2]$ में $f(x) = x(x-1)$ के लिए लग्रांज माध्य प्रमेय में c का मान है—

The value of c in Lagrange's mean value theorem for $f(x) = x(x-1)$ in $[1, 2]$ is :

(A) $\frac{5}{4}$ (B) $\frac{3}{2}$

(C) $\frac{7}{4}$ (D) $\frac{9}{5}$

58. (B) $$f(x) = x(x-1)$$

अन्तराल $= [1, 2]$

$$a = 1, b = 2$$

$$f'(x) = 2x - 1$$

माना अन्तराल $[1, 2]$ के मध्य कोई मान c है तब लैग्रान्ज माध्य प्रमेय से

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$2c - 1 = \frac{2(2-1)-1(1-1)}{2-1}$$

$$2c - 1 = 2$$

$$2c = 3$$

$$c = \frac{3}{2}$$

59. यदि

$x = a(\cos t + t\sin t)$
$y = a(\sin t - t\cos t)$

तो $\frac{d^2y}{dx^2}$ का मान है—

If

$x = a(\cos t + t\sin t)$
$y = a(\sin t - t\cos t)$

then the value of $\frac{d^2y}{dx^2}$ is :

(A) $\frac{t}{a}\sec^3 t$ (B) $at\sec^3 t$

(C) $\frac{1}{a}\frac{\sec^3 t}{t}$ (D) $\frac{a\sec^3 t}{t}$

59. (C) $$x = a(\cos t + t\sin t) \quad ...(i)$$
$$y = a(\sin t - t\cos t) \quad ...(ii)$$

समीकरणों (i) व (ii) का t के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dx}{dt} = a[-\sin t + t\cos t + \sin t]$$

$$\frac{dx}{dt} = a[t\cos t] \quad ...(iii)$$

तब $\frac{dy}{dt} = a[\cos t + t\sin t - \cos t]$

$\frac{dy}{dt} = a[t\sin t]$ ...(iv)

(iii) व (iv) का भाग करने पर,

$\frac{dy}{dx} = \frac{a t\sin t}{a t\cos t} = \tan t$ ...(v)

समी. (v) का x के सापेक्ष पुनः अवकलन करने पर,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

$$= \frac{d}{dx}(\tan t)$$

$$= \frac{d}{dt}(\tan t).\frac{dt}{dx}$$

$$= \sec^2 t.\frac{1}{a t\cos t}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{a}\frac{\sec^3 t}{t}$$

60. यदि $\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = A$ और $\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x} = B$, तो निम्न में से कौन-सा सत्य है ?

If $\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = A$ and $\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x} = B$, then which of the following is true ?

(A) A = B = 0

(B) A = 0 और B = ∞

(C) A = 1 और B = ∞

(D) A = 0 और B = 1

60. (D) $\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = A$

$$A = \lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}$$

$\because$ $-1 \le \sin\left(\frac{1}{x}\right) \le 1$

या $0 \le \left|\sin\frac{1}{x}\right| \le 1$

(निरपेक्ष मान के लिए)

या $0 \le |x|.\left|\sin\frac{1}{x}\right| \le |x|$

या $0 \le \left|x\sin\frac{1}{x}\right| \le |x|$

$\because$ $\lim_{x\to 0} 0 = 0$

व $\lim_{x\to 0} |x| = 0$

तब $\lim_{x\to 0}\left|x\sin\frac{1}{x}\right| = 0$

$\therefore$ A = 0

तथा $\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = B$

$\therefore$ $B = \lim_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x}$

माना $x = \frac{1}{t}$ तब $x \to \infty$ तो $t \to 0$

$\therefore$ $B = \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}$

B = 1

61. अवकल समीकरण $(x+2y^3)\frac{dy}{dx} = y,\ y(0) = 1$ का हल है—

The solution of the differential equation $(x+2y^3)\frac{dy}{dx} = y,\ y(0) = 1$ is :

(A) $x + y - y^3 = 0$

(B) $x - y + y^3 = 0$

(C) $-x + 2y - 2y^3 = 0$

(D) $x + 2y - 2y^3 = 0$

61. (A) $(x + 2y^3)\frac{dy}{dx} = y$

व $y(0) = 1$

$\therefore$ $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x+2y^3}$

व $\frac{dx}{dy} = \frac{x+2y^3}{y}$

$\Rightarrow$ $\frac{dx}{dy} - \frac{x}{y} = 2y^2$

$\frac{dx}{dt} + Px = Q$ से तुलना करने पर,

$$P = -\frac{1}{y}$$

$$Q = 2y^2$$

$\therefore$ $I.F. = e^{\int P dy} = e^{\int -\frac{1}{y}dy}$

$$= e^{\log y^{-1}} = \frac{1}{y}$$

$\therefore$ $x \times I.F. = \int Q.I.F.dy + c$

$$x + \frac{1}{y} = \int 2y^2.\frac{1}{y}dy + c$$

$$\frac{x}{y} = y^2 + c$$

$$x = y^3 + yc$$

$\therefore$ $x = 0$ पर, $y = 1$

$0 = 1 + 1 \times c$

$c = -1$

$\therefore$ अभीष्ट समीकरण $x = y^3 - y$

$x + y - y^3 = 0$

62. $\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}+1}$ बराबर है—

$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}+1}$ is equal to :

(A) –1 (B) 1

(C) 0 (D) 2

62. (B) $\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}+1} = \lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\frac{1}{x}}\left(1-\frac{1}{e^{\frac{1}{x}}}\right)}{e^{\frac{1}{x}}\left(1+\frac{1}{e^{\frac{1}{x}}}\right)}$

$$= \frac{\left(1-\frac{1}{e^{\frac{1}{0}}}\right)}{\left(1+\frac{1}{e^{\frac{1}{0}}}\right)} + \frac{1-\frac{1}{\infty}}{1+\frac{1}{\infty}} = \frac{1-0}{1+0}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}+1} = 1$$

63. फलन $\phi(x) = (x-a)^m(x-b)^n$ रॉल के प्रमेय की शर्तों को संतुष्ट करता है, जब—

The function $\phi(x) = (x-a)^m(x-b)^n$ satisfies the conditions of Rolle's theorem, when :

(A) m, n धन पूर्णांक हों/m, n are positive integers

(B) m, n धन पूर्णांक हों तथा $a < b$/m, n are positive integers and $a < b$

(C) $a < b$

(D) $m > n$

63. (A) $f(x) = (x-a)^m(x-b)^n$

$f(x)$, $[a, b]$ में सतत् व अवकलनीय है

$\therefore$ $f(a) = (a-a)^m(a-b)^n = 0$

$f(b) = (b-a)^m(b-b)^n = 0$

तब $f'(c) = 0$

$\therefore m(x-a)^{m-1}(x-b)^n + m(nx-a)^m (x-b)^{n-1} = 0$

$\therefore (x-a)^{m-1}(x-b)^{n-1}[mx - mb + nx - na] = 0$

$\because x = c$ पर

$(m+n)c = mb + na$

$$c = \frac{mb+na}{m+n}$$

$\because$ फलन व अन्तराल रोले की प्रमेय को सन्तुष्ट करते हैं। यह तभी सम्भव है जबकि $m, n \in I^+$ अर्थात् m व n धनपूर्णांक हों।

64. मान लीजिए $f : R \to R$ एक अवकलनीय फलन इस प्रकार है कि $f'(x^2) = 4x^2 - 1$, $x > 0$ के लिए, $f(1) = 1$, तब $f(4)$ है—

Let $f: R \to R$ be a differentiable function such that $f'(x^2) = 4x^2 - 1$, for $x > 0$ and $f(1) = 1$. Then $f(4)$ is :

(A) 64 (B) 30
(C) 42 (D) 28

64. (D) दिया है, $f'(x^2) = 4x^2 - 1$ ...(i)

दोनों ओर x^2 के सापेक्ष समाकलन करने पर,

$$\int f'(x^2)dx^2 = \int (4x^2-1)dx^2$$

$$f(x^2) = \frac{4x^4}{2} - x^2 + c$$

$$f(x^2) = 2x^4 - x^2 + c$$

$\because$ $f(1) = 1$

अर्थात् $1 = 2 \times 1 - 1 + c$

$c = 0$

तब $f(x^2) = 2x^4 - x^2$

$x = 2$ रखने पर,

$$f(2^2) = 2 \times 2^4 - 2^2$$
$$f(4) = 32 - 4$$
$$f(4) = 28$$

65. यदि $y = x^{x^{x^{\dots\text{अनंत तक}}}}$, तो $x\frac{dy}{dx}$ बराबर है–

If $y = x^{x^{x^{\dots\text{to infinity}}}}$, then $x\frac{dy}{dx}$ is equal to :

(A) $\frac{y^2}{y - x\log_e x}$ (B) $\frac{y^2}{x - y\log_e x}$

(C) $\frac{y^2}{1 - y\log_e x}$ (D) $\frac{y^2}{y\log_e x - 1}$

65. (C) $y = x^{x^{x^{x^{\dots\infty}}}}$

$y = x^y$ (अनन्त फलन के लिए)

दोनों ओर लघुगणक लेने पर,

$$\log_e y = \log_e x^y$$
$$\log_e y = y\log_e x$$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = y \times \frac{1}{x} + \log e^x . \frac{dy}{dx}$$

या $\frac{dy}{dx}\left(\frac{1}{y} - \log_e x\right) = \frac{y}{x}$

या $x\frac{dy}{dx} = \frac{y}{\left(\frac{1 - y\log_e x}{y}\right)}$

या $x\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{1 - y\log_e x}$

66. यदि $x = t$, $y = \log_e(\cos t)$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, तो $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$ का मान है–

If $x = t$, $y = \log_e(\cos t)$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, then the value of $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$ is :

(A) $\log_e\left(\sqrt{2}+1\right)$

(B) $\log_e\left(\sqrt{2}-1\right)$

(C) $\sqrt{2}\log_e\left(\sqrt{2}+1\right)$

(D) $\sqrt{2}\log_e\left(\sqrt{2}-1\right)$

66. (A) $x = t \Rightarrow \frac{dx}{dt} = 1$

$y = \log_e \cos t$

$\Rightarrow$ $\frac{dy}{dt} = \frac{-\sin t}{\cos t} = -\tan t$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1^2 + (-\tan t)^2}\, dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 + \tan^2 t}\, dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec t\, dt$$

$$= \left[\log_e(\sec t + \tan t)\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \log_e\left(\sec\frac{\pi}{4} + \tan\frac{\pi}{4}\right) - \log_e(\sec 0 + \tan 0)$$

$$= \log\left(\sqrt{2}+1\right) - \log(1)$$

$$= \log\left(\sqrt{2}+1\right)$$

67. $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{6n}\right]$ का मान है–

The value of $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{6n}\right]$ is :

(A) 0 (B) $\log_e 2$
(C) $\log_e 3$ (D) $\log_e 6$

67. (D) $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{6n}\right]$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+5n}\right]$$

(संक्षिप्त रूप में लिखने पर)

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{5n}\frac{1}{n+r}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{5n}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{r}{n}}\right)$$

$\because$ माना $\frac{r}{n} = x$ व $\frac{1}{n} = dx$

तब निम्न सीमा $a = \frac{1}{\infty} = 0$

व उच्च सीमा $b = \frac{5n}{n} = 5$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{5n}\frac{1}{1+\frac{r}{n}} = \int_0^5 \frac{dx}{1+x}$$

$$= \left[\log(1+x)\right]_0^5$$

$= \log(1 + 5) - \log(1 + 0)$

$= \log_e 6$

68. $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \sin\frac{a}{n}\right)^n$ बराबर है–

$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \sin\frac{a}{n}\right)^n$ is equal to :

(A) e (B) e^a
(C) e^{2a} (D) 0

68. (B) माना $y = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \sin\frac{a}{n}\right)^n$

दोनों ओर लघुगणक लेने पर,

$$\log y = \lim_{n\to\infty} n \log\left(1 + \sin\frac{a}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \log\frac{\left(1+\sin\frac{a}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \times \frac{\sin\frac{a}{n}}{\sin\frac{a}{n}}$$

या $\log y = \lim_{n\to\infty} \log\frac{\left(1+\sin\frac{a}{n}\right)}{\sin\frac{a}{n}}$

$$\times \lim_{n\to\infty} . \frac{\sin\frac{a}{n}}{\frac{a}{n}} . a$$

माना $\frac{1}{n} = t$ तब $n \to \infty$ तो $t \to 0$

$$\therefore \log y = \lim_{t\to 0} \log\frac{(1+\sin at)}{\sin at} \times \lim_{t\to 0} . \frac{\sin at}{at} . a$$

$\log y = 1 \times 1 \times a$

$\left[\lim_{t\to 0}\frac{\sin at}{at} = 1 \text{ तथा } \lim_{t\to 0} . \text{In}\frac{(1+\sin t)}{\sin t} = 1\right]$

या $\log y = a$

प्रतिलघुगणक लेने पर, $y = e^a$

69. $\int_0^{1000} e^{x-|x|}dx$ का मान है–

The value of $\int_0^{1000} e^{x-|x|}dx$ is :

(A) $e^{1000} - 1$ (B) $\frac{e^{1000}-1}{e-1}$

(C) $1000(e - 1)$ (D) $\frac{e-1}{1000}$

69. (C) $\int_0^{1000} e^{x-[x]}dx$

समाकलन की योग सीमा लगाने पर,

$\Rightarrow \int_0^1 e^{x-0}dx + \int_1^2 e^{x-1}dx + \int_2^3 e^{x-2}dx + ... \int_{999}^{1000} e^{x-999}dx$

$\Rightarrow \left[e^x\right]_0^1 + \left[e^{x-1}\right]_1^2 + \left[e^{x-2}\right]_2^3 + ... \left[e^{x-999}\right]_{999}^{1000}$

$\Rightarrow e^1 - e^0 + e^1 + e^0 + e^1 + e^0 + ... e^1 - e^0$

(1000 बार)

$\Rightarrow 1000(e^1 - e^0)$

$= 1000(e - 1)$

70. $\int x^2 e^x dx$ का मान है–

The value of $\int x^2 e^x dx$ is :

(A) $2e^x + c$
(B) $(x^2 + 2)e^x + c$
(C) $(x^2 + 2x + 2)e^x + c$
(D) $(x^2 - 2x + 2)e^x + c$

70. (D) $I = \int x^2 e^x dx$ (माना)

$\because \int f_1 f_2 \, dx$

$= f_1 \int f_2 \, dx - \int \left(\frac{df_1}{dx} \times \int f_2 \, dx \right) dx + c$

$I = x^2 \int e^x - \int \left(\frac{d}{dx} x^2 \times \int e^x dx \right) dx + c$

$I = x^2 e^x - \int 2x.e^x dx + c$

$I = x^2 e^x - 2\left[x \int e^x dx - \int \left(\frac{d}{dx} \int e^x dx \right) dx \right] + c$

$I = x^2 e^x - 2[xe^x - e^x] + c$

$I = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + c$

$I = (x^2 - 2x + 2)e^x + c$

71. $\int_0^\infty \frac{xdx}{(1+x)(1+x^2)}$ का मान है–

The value of $\int_0^\infty \frac{xdx}{(1+x)(1+x^2)}$ is :

(A) $\frac{\pi}{2}$ (B) $\frac{\pi}{4}$

(C) $\frac{\pi}{3}$ (D) $\frac{\pi}{8}$

71. (B) माना $I = \int_0^\infty \frac{xdx}{(1+x)(1+x^2)}$

$I = \frac{1}{2} \int_0^\infty \left(-\frac{1}{x+1} + \frac{x+1}{1+x^2} \right) dx$

(आंशिक भिन्न करने पर)

$I = \frac{1}{2} \int_0^\infty \left(\frac{x+1}{1+x^2} - \frac{1}{x+1} \right) dx$

$I = \frac{1}{2} \left[\int_0^\infty \left(\frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x+1} \right) dx \right]$

$I = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \log(1+x^2) + \tan^{-1} x - \log(1+x) \right]_0^\infty$

$I = \frac{1}{2} \left[\log\left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{1+x} \right) + \tan^{-1} x \right]_0^\infty$

$I = \frac{1}{2} \left[\log\left(\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{1+\frac{1}{x}} \right) + \tan^{-1} x \right]_0^\infty$

$I = \frac{1}{2} \left[\log(1) + \tan^{-1} \infty - \log 1 - \tan^{-1}(0) \right]$

$I = \frac{1}{2} \left[0 + \frac{\pi}{2} - 0 - 0 \right]$

$I = \frac{\pi}{4}$

72. यदि $u = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$ तथा $x^3 + y^3 + 3axy = 5a^2$ है, तब (a, a) पर $\frac{du}{dx}$ का मान है–

If $u = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$ and $x^3 + y^3 + 3axy = 5a^2$, then the value of $\frac{du}{dx}$ at (a, a) is :

(A) a
(B) a^2
(C) $3a^2$
(D) उपर्युक्त में से कोई नहीं/None of the above

72. (D) $u = \left(x^2 + y^2\right)^{\frac{1}{2}}$ ...(i)

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}}.2x + 2yy'$

$= \frac{x + yy'}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ ...(ii)

तथा $x^3 + y^3 + 3axy = 5a^2$ ...(iii)

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$3x^2 + 3y^2y' + 3a(xy' + y) = 0$

या $x^2 + y^2y' + axy' + ay = 0$

$y' = -\frac{(ay + x^2)}{ax + y^2}$

समी. (ii) से,

$\frac{du}{dx} = \frac{x - y\frac{(ay + x^2)}{ax + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

$= \frac{ax^2 + xy^2 - ay^2 - x^2y}{(ax + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}}$

बिन्दु (a, a) पर,

$\frac{dy}{dx}_{(a,a)} = \frac{a.a^2 + a.a^2 - aa^2 - a^2a}{(a.a + a^2)\sqrt{a^2 + a^2}} = 0$

$\therefore \frac{dy}{dx}_{(a,a)} = 0$

73. अवकल समीकरण $\sqrt{1-x^2}dy + \sqrt{1-y^2}\,dx = 0$ $|x| < 1$, का एक हल है–

A solution of the differential equation $\sqrt{1-x^2}dy + \sqrt{1-y^2}\,dx = 0\ (|x| < 1, |y| < 1)$ is :

(A) $x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = c$

(B) $x\sin^{-1} y + y\sin^{-1} x = c$

(C) $\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{y^2}{\sqrt{1-y^2}} = c$

(D) $x\sqrt{1-x^2} + y\sqrt{1-y^2} = c$

73. (A) $\sqrt{1-x^2}dy + \sqrt{1-y^2}dx = 0$

या $\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} + \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0$

दोनों ओर समाकलन करने पर,

$\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} + \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = c$

$\sin^{-1}y + \sin^{-1}x = c$

74. यदि $u = \log\frac{x^3 + y^3}{x + y}$, तब $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y}$ का मान है–

If $u = \log\frac{x^3 + y^3}{x + y}$, then the value of $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y}$ is :

(A) u (B) 2

(C) 0 (D) $u + 1$

74. (B) $u = \log\left(\frac{x^3 + y^3}{x + y}\right)$

$= \log(x^3 + y^3) - \log(x + y)$

x के सापेक्ष आंशिक अवकलन करने पर,

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{x^3 + y^3}.3x^2 - \frac{1}{x + y}$

या $x\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{3x^3}{x^3 + y^3} - \frac{x}{x + y}$ ...(i)

u का y के सापेक्ष आंशिक अवकलन करने पर,

$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{x^3 + y^3}.3y^2 - \frac{1}{x + y}$

या $y\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{3y^3}{x^3 + y^3} - \frac{y}{x + y}$ ...(ii)

समी. (i) व (ii) को जोड़ने पर,

$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{3x^3}{x^3 + y^2} - \frac{x}{x + y}$

$$+\frac{3y^3}{x^3+y^3}-\frac{y}{x+y}$$

$$=\frac{3(x^3+y^3)}{x^3+y^3}-\frac{x+y}{x+y}$$

$$=3-1$$

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=2$$

75. यदि $x+2y=8$, तब xy का अधिकतम मान है–

If $x+2y=8$, then the maximum value of xy is :

(A) 20 (B) 16

(C) 24 (D) 8

75. (D) $x+2y=8$

माना $z=xy$

तब $z=\frac{x(8-x)}{2}=\frac{1}{2}(8x-x^2)$

z का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dz}{dx}=\frac{1}{2}[8-2x]$$

$$\frac{dz}{dx}=(4-x) \quad \text{...(i)}$$

अधिकतम व न्यूनतम मान के लिए

$$\frac{dz}{dx}=0$$

या $4-x=0$

$x=4$

समी. (i) का पुनः अवकलन करने पर,

$$\frac{d^2z}{dx^2}=-1 \text{ (ऋणात्मक)}$$

$\therefore$ $x=4$ पर z का मान अधिकतम होगा।

$\therefore$ z का अधिकतम मान

$$z_{\max}=\frac{1}{2}(8\times4-4^2)$$

$$=\frac{1}{2}(32-16)$$

$$z_{\max}=8$$

76. वक्र $x=a(\theta+\sin\theta)$, $y=a(1+\cos\theta)$ के $\theta=\frac{\pi}{2}$ स्पर्श-रेखा का समीकरण है–

If equation of the tangent at $\theta=\frac{\pi}{2}$ to the curve $x=a(\theta+\sin\theta)$, $y=a(1+\cos\theta)$ is :

(A) $x-y=a\left(\frac{\pi}{2}+2\right)$

(B) $x-y=\frac{a\pi}{2}$

(C) $x+y=a\left(\frac{\pi}{2}+2\right)$

(D) $x+y=\frac{a\pi}{2}$

76. (C) $x=a(\theta+\sin\theta)$ ...(i)

$y=a(1+\cos\theta)$ ...(ii)

x व y का θ के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dx}{d\theta}=a(1+\cos\theta)$$

तथा $\frac{dy}{d\theta}=-a\sin\theta$

भाग देने पर,

$$\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=-\frac{a\sin\theta}{a(1+\cos\theta)}$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$$

$\therefore$ स्पर्श रेखा की प्रवणता

$$m=-\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$$

स्पर्श रेखा का समीकरण

$$y-y'=m(x-x')$$

$$y-a(1+\cos\theta)=-\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}[x-a(\theta+\sin\theta)]$$

$\theta=\frac{\pi}{2}$ पर

$$y-a\left(1+\cos\frac{\pi}{2}\right)=\frac{-\sin\frac{\pi}{2}}{1+\cos\frac{\pi}{2}}\left[x-a\left(\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$y-a=\frac{-1}{1}\left(x-a-a\frac{\pi}{2}\right)$$

$$y-a=-x+a+a\frac{\pi}{2}$$

$$x+y=2a+a\frac{\pi}{2}$$

$$x+y=a\left(\frac{\pi}{2}+2\right)$$

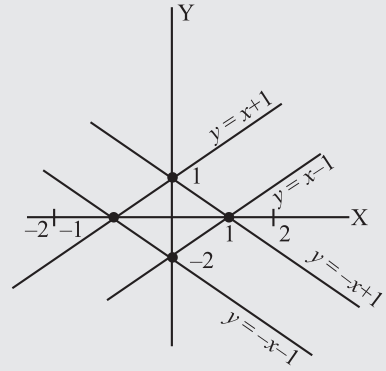
77. वक्र $y=|x|-1$ तथा $y=-|x|+1$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल है–

The area bounded by the curves $y=|x|-1$ and $y=-|x|+1$ is :

(A) 1 (B) 2

(C) $2\sqrt{2}$ (D) 4

77. (B) $y=|x|-1$ ...(i)



समी. (i) की बनी रेखाओं का समी.

$y=x-1$ व $y=-x-1$

व $y=-|x|+1$ ...(ii)

समी. (ii) की बनी रेखाओं का समी.

$y=-x+1$

व $y=x+1$

अतः रेखाओं द्वारा घिरा क्षेत्रफल

$$A=\int_{-1}^{0}(x+1)dx+\int_{-1}^{0}(-x-1)dx+\int_{0}^{1}(-x+1)dx+\int_{0}^{1}(x-1)dx$$

$$A=\left[\frac{x^2}{2}+1\right]_{-1}^{0}+\left|\left[-\frac{x^2}{2}-x\right]_{-1}^{0}\right|+\left[\frac{-x^2}{2}+x\right]_{0}^{1}+\left[\frac{x^2}{2}-x\right]_{0}^{1}$$

$$=\left[\frac{1}{2}\right]+\left[\frac{-1}{2}+1\right]+\left[\frac{-1}{2}+1\right]+\left[\frac{1}{2}-1\right]$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$$

$$A=2$$

78. किसी वक्र के बिन्दु $P(x, y)$ पर स्पर्श-रेखा की प्रवणता $-\frac{y+3}{x+2}$ है। यदि वक्र मूलबिन्दु से गुजरता है, तो वक्र का समीकरण है–

The slope of the tangent at the point $P(x, y)$ on a curve is $-\frac{y+3}{x+2}$. If the curve passes through the origin, then the equation of the curve is :

(A) $xy+2y+3x=0$

(B) $x^2-y^2+2x-3y=0$

(C) $xy+6x=0$

(D) $xy-2y+3x=0$

78. (A) स्पर्श-रेखा की प्रवणता

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y+3}{x+2}$$

या $\frac{dy}{y+3}=-\frac{dx}{x+2}$

दोनों ओर समाकलन करने पर,

$$\int \frac{dy}{y+3} = -\int \frac{dx}{x+2}$$

$\log y + 3 = -\log(x+2) + \log c$

$\log[(y+3)(x+2)] = \log c$

या $(y+3)(x+2) = c$

वक्र मूल बिन्दु से गुजरता है।

अर्थात् $x = 0$, व $y = 0$ रखने पर

$(0+3)(0+2) = c$

$c = 6$

अतः अभीष्ट वक्र का समीकरण

$(y+3)(x+2) = 6$

$xy + 2y + 3x + 6 = 6$

$xy + 2y + 3x = 0$

79. यदि $y(x)$, अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} + 2xy = x$, $y(0) = 0$ का एक हल है, तो $\lim_{x\to\infty} y(x)$ है—

If $y(x)$ is a solution of the differential equation $\frac{dy}{dx} + 2xy = x$, $y(0) = 0$, then $\lim_{x\to\infty} y(x)$ is :

(A) $-\frac{1}{2}$ (B) -1

(C) $\frac{1}{2}$ (D) 1

79. (C) $\frac{dy}{dx} + 2xy = x$

यहाँ $P = 2x$

$Q = x$

$\text{I.F.} = e^{\int P dx} = e^{\int 2x dx} = e^{x^2}$

$\therefore \quad y \times \text{I.F.} = \int Q \times \text{I.F.} dx + c$

$y.e^{x^2} = \int e^{x^2} dx + c$

$y.e^{x^2} = xe^{x^2} - \int 1 \times e^{x^2} dx + c$

माना $x^2 = t$

तो $xdx = \frac{dt}{2}$

$y.e^{x^2} = \frac{1}{2}\int e^t dt + c$

$ye^{x^2} = \frac{1}{2}e^t + c$

$ye^{x^2} = \frac{1}{2}e^{x^2} + c$

$\because \quad y(0) = 0$

अर्थात् $x = 0, y = 0$

$0 \times e^0 = \frac{1}{2}e^0 + c$

$c = -\frac{1}{2}$

$\therefore \quad ye^{x^2} = \frac{1}{2}e^{x^2} - \frac{1}{2}$

$y = \frac{1}{2}\left[1 - \left(e^{x^2}\right)^{-1}\right]$

$\lim_{x\to 0} y(-x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{e^{x^2}}\right]$

$= \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{e^\infty}\right]$

$\lim_{x\to\infty} y(x) = \frac{1}{2}$

80. यदि $y = y(x)$ तथा $\frac{(2+\sin x)}{y+1}\left(\frac{dy}{dx}\right) = -\cos x$, $y(0) = 1$, तो $y\left(\frac{\pi}{2}\right)$ बराबर है—

If $y = y(x)$ and $\frac{(2+\sin x)}{y+1}\left(\frac{dy}{dx}\right) = -\cos x$, $y(0) = 1$, then $y\left(\frac{\pi}{2}\right)$ is equal to :

(A) 1 (B) $\frac{2}{3}$

(C) $-\frac{1}{3}$ (D) $\frac{1}{3}$

80. (D) $y = y(x)$

तथा $\frac{2+\sin x}{y+1}\left(\frac{dy}{dx}\right) = -\cos x$

$\frac{dy}{y+1} = \frac{-\cos x}{2+\sin x} dx$

दोनों ओर समाकलन करने पर,

$\int \frac{dy}{y+1} = -\int \frac{\cos x\, dx}{2+\sin x}$

माना $2 + \sin x = t$

$\cos x\, dx = dt$

$\int \frac{dy}{y+1} = -\int \frac{dt}{t}$

$\log(y+1) = -\log(t) + \log c$

$\log(y+1)(2+\sin x) = \log c$

या $(y+1)(2+\sin x) = c$ ...(i)

$\because \quad y(0) = 1$

समीकरण (i) में मान रखने पर,

$(1+1)(2+\sin 0) = c$

$c = 4$

समी. (i) से,

$(y+1)(2+\sin x) = 4$

$y = \frac{4}{2+\sin x} - 1$

$\therefore \quad y(x) = \frac{4}{2+\sin x} - 1$

अब $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4}{2+\sin\frac{\pi}{2}} - 1$

$= \frac{4}{2+1} - 1$

$= \frac{4}{3} - \frac{1}{1}$

$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4-3}{3}$

$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{3}$

81. 9 वस्तुओं का माध्य भार 15 किग्रा है। यदि और वस्तु जोड़ दें, तो माध्य भार 16 किग्रा हो जाता है। तब 10वीं वस्तु का भार है—

The mean weight of 9 items is 15 kg. If one more item is added, the mean weight becomes 16 kg. Then the weight of the 10th item is :

(A) 35 किग्रा/35 kg (B) 30 किग्रा/30 kg

(C) 25 किग्रा/25 kg (D) 20 किग्रा/20 kg

81. (C) 9 वस्तुओं का माध्य भार = 15 किग्रा.

माना x किग्रा. की वस्तु को जोड़ने पर माध्य भार 16 किग्रा. हो जाता है।

$\therefore$ 9 वस्तुओं का कुल भार $= 15 \times 9 = 135$

$\therefore$ दस वस्तुओं का कुल भार = 16

$\frac{9 \text{ वस्तुओं का भार } + x}{10} = 16$

$135 + x = 160$

$x = 160 - 135$

$x = 25$ किग्रा.

82. यदि $P(A) = \frac{7}{15}$, $P(B) = \frac{8}{15}$ और $P(A \cap B) = \frac{11}{15}$, तो $P(A/B)$ का मान है—

If $P(A) = \frac{7}{15}$, $P(B) = \frac{8}{15}$ and $P(A \cap B) = \frac{11}{15}$, then $P(A/B)$ is :

(A) $\frac{3}{8}$ (B) $\frac{11}{8}$

(C) $\frac{7}{8}$ (D) $\frac{5}{8}$

82. (B) $P(A) = \frac{7}{15}$, $P(B) = \frac{8}{15}$

$P(A \cap B) = \frac{11}{15}$

$\therefore \quad P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{11}{15}}{\frac{8}{15}}$

$$P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{11}{8}$$

83. एक सिक्के को 6 बार उछालते हैं। ठीक चार शीर्ष प्राप्त होने की प्रायिकता है–

A coin is thrown 6 times. The probability of getting exactly four heads is :

(A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{3}{4}$

(C) $\frac{5}{16}$ (D) $\frac{15}{64}$

83. (D) एक सिक्के को 6 बार उछाला जाता है।

कुल सम्भावनाएँ $= 2^6 = 64$

ठीक 4 शीर्ष प्राप्त होने की सम्भावनाएँ $=$

$${}^6C_4 = \frac{6\times5}{2\times1} = 15$$

अतः ठीक 4 शीर्ष प्राप्त होने की प्रयिकता

$$= \frac{15}{64}$$

84. एक थैले में 8 लाल और 5 सफेद गेंदें हैं। यदृच्छया तीन गेंदें निकाली जाती हैं। एक लाल और दो सफेद गेंद होने की प्रायिकता है–

A bag contains 8 red and 5 white balls. Three balls are drawn at random. The probability that one ball is red and two balls are white, is :

(A) $\frac{40}{143}$ (B) $\frac{80}{146}$

(C) $\frac{10}{296}$ (D) $\frac{5}{286}$

84. (A) लाल गेंद = 8

सफेद गेंद = 5

कुल गेंद = 13

पहली लाल व दूसरी और तीसरी सफेद होने की प्रायिकता $= \frac{8}{13}\times\frac{5}{12}\times\frac{4}{11}$

पहली सफेद व दूसरी लाल तथा तीसरी सफेद होने की प्रायिकता $= \frac{5}{13}\times\frac{4}{12}\times\frac{8}{11}$

पहली व दूसरी सफेद तथा तीसरी लाल होने की प्रायिकता $= \frac{5}{13}\times\frac{8}{12}\times\frac{4}{11}$

अभीष्ट प्रायिकता $= \frac{8}{13}\times\frac{5}{12}\times\frac{4}{11}+\frac{5}{13}\times\frac{4}{12}\times\frac{8}{11}+\frac{5}{13}\times\frac{8}{12}\times\frac{4}{11}$

$$= 3\times\frac{8}{13}\times\frac{5}{12}\times\frac{4}{11}$$

$$= \frac{40}{143}$$

85. 1, 3, 4, 5, 7, 4 का माध्य n है। संख्या 3, 2, 2, 4, 3, p, 3 का माध्य $n-1$ तथा उनकी माध्यिका q है। तब $p + q$ है–

The mean of 1, 3, 4, 5, 7, 4 is n. The numbers 3, 2, 2, 4, 3, p, 3 have mean $n-1$ and median q. Then $p + q$ is :

(A) 6 (B) 4

(C) 7 (D) 5

85. (C) 1, 3, 4, 5, 7, 4 का माध्य n है

अतः $\frac{1+3+4+5+7+4}{6} = n$

$$n = \frac{24}{6} = 4$$

3, 2, 2, 4, 3, p, 3 का माध्य $n-1$ है।

$$\therefore \frac{3+2+2+4+3+p+3}{7} = n-1$$

$$\frac{17+p}{7} = 4-1$$

$$17+p = 21$$

$$p = 4$$

आरोही क्रम में संख्याएँ, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4

माध्यिका $= \frac{7+1}{2}$ वाँ पद

= 4वाँ पद

$$q = 3$$

$$\therefore p+q = 4+3$$

$$p+q = 7$$

86. यदि एक अतिपरवलय, जिसके प्राचलिक समीकरण $x = ct, y = \frac{c}{t}$ हैं, केन्द्र (0, 0) वाले किसी वृत्त से किन्हीं चार बिन्दुओं, जिनके प्राचल मान t_1, t_2, t_3 और t_4 से निर्धारित हैं, में मिलता है, तो $t_1.t_2.t_3.t_4$ का मान है–

If a hyperbola, whose parametric equations are $x = ct$, $y = \frac{c}{t}$, meets any circle with centre at (0, 0) in four points, determined by the parametric values t_1, t_2, t_3 and t_4, then the value of $t_1.t_2.t_3.t_4$ is :

(A) c^2 (B) $-c^2$

(C) -1 (D) 1

86. (D) अतिपरवलय के प्राचलिक समीकरण $x = ct$, $y = \frac{c}{t}$

माना वृत्त का समीकरण

$$x^2 + y^2 + 2yx + 2fy + k = 0$$

$\because$ अतिपरवलय वृत्त को काटता है अतः x व y के मान सन्तुष्ट कराने पर,

$$c^2t^2 + \frac{c^2}{t^2} + 2g\,ct + 2f\frac{c}{t} + k = 0$$

$$c^2t^4 + 2gct^3 + kt^2 + 2fct + c^2 = 0$$

क्योंकि अतिपरवलय वृत्त को चार बिन्दुओं t_1, t_2, t_3 व t_4 पर काटता है अर्थात् ये समीकरण के मूल होंगे।

अतः चतुर्थ घात समीकरण में मूलों का गुणनफल $t_1t_2t_3t_4 = +\frac{E}{A} = \frac{c^2}{c^2} = 1$

87. दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ की नाभियों से इसकी किसी स्पर्शी पर डाले गए लम्बों का गुणनफल है–

The product of the perpendiculars drawn from the foci of an ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ on any tangent to it, is :

(A) a^2 (B) b^2

(C) -1 (D) 2

87. (B) दीर्घवृत्त का समीकरण

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$$

माना स्पर्श बिन्दु (x_0, y_0) हैं।

तब स्पर्शी का समीकरण

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2} = 1$$

यदि दीर्घवृत्त की नाभियों के निर्देशांक $(\pm c, 0)$ (माना) हो, तो इन से स्पर्शी की दूरियाँ

$$d_1 = \frac{\frac{x_0c}{a^2}+1}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}}}$$

तथा $$d_2 = \frac{\frac{x_0c}{a^2}-1}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}}}$$

अब $$d_1 \times d_2 = \frac{\frac{x_0^2c^2}{a^4}-1}{\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}}$$

$$= \frac{\left(x_0^2c^2-a^4\right)}{\left(x_0^2b^4+y_0^2a^4\right)}\cdot\frac{a^4b^4}{a^4}$$

$$= \frac{\left(x_0^2c^2-a^4\right)b^4}{\left(x_0^2b^4+y_0^2a^4\right)}$$

$\because$ बिन्दु दीर्घवृत्त को सन्तुष्ट करेगा

अतः $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2} = 1$

$$\Rightarrow x_0^2b^2 + y_0^2a^2 = a^2b^2$$

या $y_0^2a^4 = a^4b^2 - x_0^2a^2b^2$

तथा $b^2 = a^2 - c^2$

तब $d_1 \times d_2 = \frac{\left(x_0^2c^2-a^4\right)b^4}{x_0^2b^4+a^4b^2-a^2b^2x_0^2}$

$$= \frac{\left(x_0^2 c^2 - a^4\right)b^4}{b^2\left[x_0^2\left(b^2-a^2\right)+a^4\right]}$$

$$= \frac{\left(x_0^2 c^2 - a^4\right)b^2}{x_0^2\left(-c^2\right)+a^4}$$

$$= -\frac{\left(x_0^2 c^2 - a^4\right)b^2}{\left(x_0^2 c^2 - a^4\right)} = -b^2$$

दूरी $= b^2$

88. माना $y = mx + c$, परवलय $y^2 = 4ax$ के बिन्दु $(am^2, -2am)$ पर अभिलम्ब का समीकरण है। तो c बराबर है—

Let $y = mx + c$ be the equation of normal to the parabola $y^2 = 4ax$ at $(am^2, -2am)$. Then c is equal to :

(A) am^3 (B) $-2am + am^3$

(C) $2am + am^3$ (D) $-2am - am^3$

88. (D) परवलय $y^2 = 4ax$ ...(i)

समीकरण (i) का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$2y\frac{dy}{dx} = 4a$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2a}{y}$$

बिन्दु $(am^2, -2am)$ पर स्पर्शी की प्रवणता

$$\frac{dy}{dx_{(am^2,\,-2am)}} = \text{M} = \frac{2a}{-2am}$$

$$\text{M} = -\frac{1}{m}$$

अभिलम्ब की प्रवणता

$$\text{M}' = -\frac{1}{\text{M}} = m$$

अभिलम्ब का समीकरण

$$(y + 2am) = m'(x - am^2)$$
$$y + 2am = m(x - am^2)$$
$$y + 2am = mx - am^3$$
$$y = mx - am^3 - 2am$$

$y = mx + c$ से तुलना करने पर,

$$c = -am^3 - 2am$$

89. यदि रेखाओं $x^2 - 2\lambda xy - 7y^2 = 0$ की प्रवणता का योग उनके गुणनफल का चार गुना हो, तब λ का मान है—

If the sum of the slopes of the lines $x^2 - 2\lambda xy - 7y^2 = 0$ is four times their product, then the value of λ is :

(A) -1 (B) 2

(C) -2 (D) 1

89. (B) रेखा युग्म का समीकरण

$$x^2 - 2\lambda xy - 7y^2 = 0$$

$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ से तुलना करने पर

$$a = 1, b = -7, h = -\lambda$$

माना रेखाओं की प्रवणताएँ m_1 व m_2 हैं।

$\therefore$ प्रवणताओं का योग $= 4 \times$ प्रवणताओं का गुणनफल

$$m_1 + m_2 = 4m_1m_2$$

$$-\frac{2h}{b} = \times 4\frac{a}{b}$$

$$-2(-\lambda) = 4 \times 1$$
$$2\lambda = 4$$

90. किसी अतिपरवलय के नाभियों के बीच की दूरी 16 इकाई तथा इसकी उत्केन्द्रता $\sqrt{2}$ है। इसका समीकरण है—

The distance between the foci of a hyperbola is 16 units and its eccentricity is $\sqrt{2}$. Its equation is :

(A) $x^2 - y^2 = 32$ (B) $2x^2 - y^2 = 32$

(C) $x^2 - 2y^2 = 32$ (D) $3x^2 - 3y^2 = 32$

90. (A) अतिपरवलय के नाभियों के बीच की दूरी $= 16$ इकाई

$$S_1S_2 = 16$$
$$2ae = 16$$
$$a = \frac{8}{e}$$

उत्केन्द्रता $(e) = \sqrt{2}$

$$\therefore \quad a = \frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$$

$$\because \quad b^2 = a^2(e^2 - 1)$$
$$b^2 = 32(2 - 1)$$
$$b^2 = 32$$
$$b = 4\sqrt{2}$$

$\therefore$ अतिपरवलय का समीकरण

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{32} - \frac{y^2}{32} = 1$$

$$x^2 - y^2 = 32$$

91. k के किन मानों के लिए रेखा $y = kx + 2$, शांकव $4x^2 - 9y^2 = 36$ की स्पर्श-रेखा होगी ?

For what values of k, the line $y = kx + 2$ will be tangent to the conic $4x^2 - 9y^2 = 36$?

(A) $\pm\frac{2}{3}$ (B) $\pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$

(C) $\pm\frac{8}{9}$ (D) $\pm\frac{4\sqrt{2}}{3}$

91. (B) दिया है, $4x^2 - 9y^2 = 36$

या $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ ...(i)

दिया गया समीकरण अतिपरवलय को प्रदर्शित करता है।

अतः अतिपरवलय पर स्पर्श रेखा

$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2}$ ...(ii)

प्रश्नानुसार स्पर्श रेखा का समी.

$$y = kx + 2$$

अतः तुलना करने पर,

$$m = k$$

व $\sqrt{a^2k^2 - b^2} = 2$

या $a^2k^2 - b^2 = 4$

समी. (i) से $a^2 = 9$ व $b^2 = 4$ रखने पर,

$$9k^2 - 4 = 4$$

$$k^2 = \frac{8}{9}$$

$$k = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

92. वृत्तों के केन्द्रों का बिन्दुपथ, जो मूलबिन्दु से गुजरता है तथा रेखा $y = 4$ से 6 लम्बाई काटता है—

The locus of the centres of circles, that passes through the origin and cuts off a length 6 from the line $y = 4$, is :

(A) $x^2 - 8y + 25 = 0$

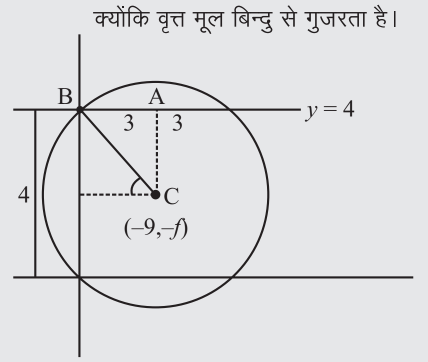
(B) $x^2 - 8y - 25 = 0$

(C) $x^2 + 8y - 25 = 0$

(D) उपर्युक्त में से कोई नहीं/None of the above

92. (B) माना वृत्त के केन्द्र C$(-g, t)$ तथा वृत्त का समी. $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

क्योंकि वृत्त मूल बिन्दु से गुजरता है।



$\therefore$ सन्तुष्ट कराने पर,

$0 + 0 + 0 + 0 + c = 0$

$\Rightarrow \quad c = 0$

अतः वृत्त का समी.

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy = 0$

अतः $\quad \text{AC} = 4 - (-f) = 4 + f$

$\text{BC} =$ त्रिज्या $= \sqrt{g^2 + f^2}$

व $\quad \text{BA} = 3$

अतः पाइथागोरस प्रमेय से,

$$\text{BC}^2 = \text{AC}^2 + \text{AB}^2$$
$$g^2 + f^2 = (4 + f)^2 + 3^2$$
$$g^2 + f^2 = 16 + f^2 + 8f + 9$$
$$g^2 + 8f - 25 = 0$$

अतः बिन्दु पथ $x^2 - 8y - 25 = 0$

93. समतल $2x + y + z = 6$ में बिन्दु (3, 5, 7) का प्रतिबिम्ब है—

The image of the point (3, 5, 7) in the plane $2x + y + z = 6$ is :

(A) (5, 1, 3) (B) (5, –1, 3)

(C) (5, 1, –3) (D) (–5, 1, 3)

93. (D) माना बिन्दु P(3, 5, 7) से समतल $2x + y + z = 6$ पर लम्ब PN है।

अतः PN रेखा पर किसी चर बिन्दु के निर्देशांक $(2\lambda + 3, \lambda + 5, \lambda + 7)$

यदि यह बिन्दु N है, तो यह समतल पर स्थित होगा।

$\therefore\ 2(2\lambda + 3) + \lambda + 5 + \lambda + 7 = 6$

$4\lambda + 6 + 2\lambda + 12 = 6$

$6\lambda = -12$

$\lambda = -2$

अतः N निर्देशांक $= [2 \times (-2) + 3, -2 + 5, -2 + 7)] = (-1, 3, 5)$

माना बिन्दु P(3, 5, 7) का समतल में प्रतिबिम्ब $Q(x, y, z)$ है।

अतः N, PQ का मध्य बिन्दु होगा।

$\therefore\ \frac{x_1 + 3}{2} = -1 \Rightarrow x_1 = -5$

$\frac{y_1 + 5}{2} = 3 \Rightarrow y_1 = 1$

$\frac{z_1 + 7}{2} = 5 \Rightarrow z_1 = 3$

$\therefore\ Q_1(-5, 1, 3)$

94. एक रेखाखण्ड, जिसके निर्देशांक अक्षों पर प्रक्षेप –6, 3, 2 हैं, की दिक्कोज्याएँ हैं—

The direction cosines of a line segment whose projections on the coordinate axes are –6, 3, 2 are :

(A) $-\frac{6}{7}, \frac{3}{7}, \frac{2}{7}$

(B) $\frac{6}{7}, \frac{3}{7}, \frac{2}{7}$

(C) $\frac{6}{7}, -\frac{3}{7}, \frac{2}{7}$

(D) उपर्युक्त में से कोई नहीं/None of the above

94. (A) अक्षों पर प्रक्षेप $a_x = -6$

$b_y = 3$

$c_z = 2$

उसकी दिक्कोज्याएँ

$$l = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + b_y^2 + c_z^2}} = \frac{-6}{\sqrt{36 + 9 + 4}} = \frac{-6}{7}$$

$$m = \frac{b_y}{\sqrt{a_x^2 + b_y^2 + c_z^2}} = \frac{3}{\sqrt{36 + 9 + 4}} = \frac{3}{7}$$

$$n = \frac{c_z}{\sqrt{a_x^2 + b_y^2 + c_z^2}} = \frac{2}{\sqrt{36 + 9 + 4}} = \frac{2}{7}$$

$\therefore\ -\frac{6}{7}, \frac{3}{7}, \frac{2}{7}$

95. यदि रेखाएँ $\frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-4}{5}$ और $\frac{x-1}{a} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$ समतलीय हैं, तो a बराबर है—

If the lines $\frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-4}{5}$ and $\frac{x-1}{a} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$ are coplanar, then a is equal to :

(A) 1 (B) 2

(C) 3 (D) 4

95. (B) रेखाएँ

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-4}{5} \quad \text{...(i)}$$

व $$\frac{x-1}{a} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4} \quad \text{...(ii)}$$

$\therefore\ a_1 = 3, b_1 = 4, c_1 = 5$

$a_2 = a, b_2 = 3, c_2 = 4$

व $x_1 = +2, y_1 = 3, z_1 = 4$

$x_2 = 1, y_2 = 2, z_2 = 3$

$\because$ रेखाएँ समतलीय है

अर्थात्

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore \begin{vmatrix} 1-2 & 2-3 & 3-4 \\ 3 & 4 & 5 \\ a & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & 5 \\ a & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$-1(16 - 15) + 1(12 - 5a) - 1(9 - 4a) = 0$

$-1 + 12 - 5a - 9 + 4a = 0$

$-a + 2 = 0$

$a = 2$

96. (1, 2, 3) से रेखा $\frac{x-6}{3} = \frac{y-7}{2} = \frac{z-7}{-2}$ पर डाले गए लम्ब की लम्बाई है—

The length of perpendicular from (1, 2, 3) to the line $\frac{x-6}{3} = \frac{y-7}{2} = \frac{z-7}{-2}$ is :

(A) 3 (B) $\sqrt{17}$

(C) 7 (D) $\sqrt{20}$

96. (C) माना बिन्दु P(1, 2, 3) रेखा $\frac{x-6}{3} = \frac{y-7}{2} = \frac{z-7}{-2}$ पर लम्ब PL डाला जाता है।

तब माना $\frac{x-6}{3} = \frac{y-7}{2} = \frac{z-7}{-2} = \lambda$

$\therefore\ x = 3\lambda + 6$

$y = 2\lambda + 7$

$z = 7 - 2\lambda$

अतः रेखा पर बिन्दु $(3\lambda + 6, 2\lambda + 7, 7 - 2\lambda)$ स्थित है।

तब रेखा PL के दिक् अनुपात $3\lambda + 6 - 1$, $2\lambda + 7 - 2$ व $7 - 2\lambda - 3$ होंगे तथा रेखा के दिक् अनुपात 3, 2, –2 हैं।

दोनो रेखाएँ परस्पर लम्ब हैं तब $3(3\lambda + 6 - 1) + (2\lambda + 7 - 2) \times 2 + (-2)(7 - 2\lambda - 3) = 0$

$9\lambda + 15 + 4\lambda + 10 - 8 + 4\lambda = 0$

$17\lambda = -17$

$\lambda = -1$

अतः बिन्दु L के निर्देशांक $= (3 \times -1 + 6, 2 \times (-1) + 7, 7 - 2 \times (-1))$

$= (3, 5, 9)$

PL के बीच की दूरी

$= \sqrt{(1-3)^2 + (2-5)^2 + (3-9)^2}$

$= \sqrt{4 + 9 + 36} = 7$

97. यदि $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ एक सरल रेखा की दिक्कोज्याएँ हैं, तब $(\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma)$ बराबर है—

If $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ are the direction cosines of a straight line, then $(\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma)$ is equal to :

(A) 0 (B) 1

(C) 3 (D) 2

97. (D) $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ सरल रेखा की दिक्कोज्याएँ हैं, तब $(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) = 1$

तथा $1 - \sin^2\alpha + 1 - \sin^2\beta + 1 - \sin^2\gamma = 1$

या $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2$

98. गोला $x^2+y^2+z^2-x-y-z=0$ की त्रिज्या है—

The radius of the sphere $x^2+y^2+z^2-x-y-z=0$ is :

(A) $\frac{3}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(C) $\sqrt{\frac{3}{2}}$ (D) $\sqrt{3}$

98. (B) गोले का समीकरण $x^2+y^2+z^2-x-y-z=0$

$\Rightarrow x^2-x+y^2-y+z^2-z=0$

$\Rightarrow x^2-x+\frac{1}{4}+y^2-y+\frac{1}{4}+z^2-z+\frac{1}{4}$

$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$

$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$

समीकरण की तुलना $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$ से करने पर,

$r=\frac{\sqrt{3}}{2}$

99. शांकब $5x^2-6xy+5y^2+26x-22y+2$ निरूपित करता है—

The conic $5x^2-6xy+5y^2+26x-22y+29=0$ represents :

(A) एक वृत्त/a circle

(B) एक परवलय/a parabola

(C) एक अतिपरवलय/a hyperbola

(D) एक दीर्घवृत्त/an ellipse

99. (A) शांकव $5x^2-6xy+5y^2+26x-22y+29=0$ की $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ से तुलना करने पर,

$A=5, B=-6, C=5, D=26, E=-22, F=29$

अब विविक्तिक B^2-4AC

$=(-6)^2-4\times5\times5=36-100$

$B^2-4AC=-64$

$\because$ $B^2-4AC<0$ तथा A = C

अतः शांकव एक वृत्त को निरूपित करता है।

100. उस बिन्दु, जहाँ रेखा $\frac{x-2}{-1}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-1}{6}$ समतल $2x+y+z=7$ का प्रतिच्छेदन करती है, के निर्देशांक हैं—

The coordinates of the point, where the line $\frac{x-2}{-1}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-1}{6}$ intersects the plane $2x+y+z=7$, are :

(A) (2, 1, –7) (B) (7, –1, 2)

(C) (1, –2, 7) (D) (2, –7, 1)

100. (C) रेखा का समीकरण,

$\frac{x-2}{-1}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-1}{6}=\lambda$ (माना)

$\therefore$ $x=2-\lambda$

$y=\lambda-3$

$z=6\lambda+1$

तथा समतल का समीकरण

$2x+y+z=7$

$\because$ रेखा समतल को प्रतिच्छेद करती है अतः सन्तुष्ट कराने पर,

$2(2-\lambda)+\lambda-3+6\lambda+1=7$

$4-2\lambda+7\lambda-2=7$

$5\lambda=5$

$\lambda=1$

अतः $x=2-1=1$

$y=1-3=-2$

व $z=6\times1+1=7$

अतः प्रतिच्छेदन बिन्दु = (1, –2, 7)

101. यदि A एक 3 × 3 व्युत्क्रमणीय आव्यूह है, तो det(adj A) बराबर है—

If A is a 3 × 3 non-singular matrix, then det (adj A) is equal to :

(A) 2 det A (B) 3 det A

(C) $(\det A)^2$ (D) $(\det A)^3$

101. (C) माना आव्यूह A एक त्युत्क्रमणीय आव्यूह है।

तब $A.\text{adj}A=|A|I$

$=\begin{vmatrix}|A| & 0 & 0\\ 0 & |A| & 0\\ 0 & 0 & |A|\end{vmatrix}$

$A.\text{adj}A=|A|^3$

तथा $|A.\text{adj}A|=|A|^3$

या $|A||\text{adj}A|=|A|^3$

या $|\text{adj}A|=|A|^2$

अर्थात् $\det(\text{adj}A)=(\det A)^2$

102. प्रतिचित्रों

$f: R\to R, f(x)=\sin x$

$g: R\to R, g(x)=x^2$

के संयुक्त प्रतिचित्रण fog का मान है—

The composite mapping fog of the maps

$f: R\to R, f(x)=\sin x$

$g: R\to R, g(x)=x^2$

is :

(A) $\sin x+x^2$ (B) $\sin(x^2)$

(C) $(\sin x)^2$ (D) $\frac{\sin x}{x^2}$

102. (B) $f(x)=\sin x$

$g(x)=x^2$

$\therefore$ $fog=f(g(x))=f(x^2)$

$fog=\sin x^2$

103. एक वर्ग आव्यूह P, $P^2=I-P$ को संतुष्ट करता है। यदि $P^n=5I-8P$, तब n बराबर है—

A square matrix P satisfies $P^2=I-P$. If $P^n=5I-8P$, then n is equal to :

(A) 4 (B) 5

(C) 6 (D) 7

103. (C) दिया है, $P^2=I-P$ ...(i)

या $P^3=P-P^2$ $(\because PI=P)$

$P^3=P-(I-P)$ (समी. (i) से)

$\therefore$ $P^3=2P-I$

इसी प्रकार,

$P^4=2P^2-P=2(I-P)-P$

$P^4=2I-3P$

तथा $P^5=2P-3P^2=2P-3(I-P)$

$P^5=2P+3P-3I=5P-3I$

अतः $P^6=5P^2-3P=5(I-P)-3P$

$P^6=5I-8P$ ...(ii)

अतः समी. (ii) की $P^n=5I-8P$ से तुलना करने पर,

$n=6$

104. $\log_4(x-1)=\log_2(x-3)$ के हलों की संख्या है—

The number of solutions of $\log_4(x-1)=\log_2(x-3)$ is :

(A) 2 (B) 3

(C) 1 (D) 0

104. (C) $\log_4(x-1)=\log_2(x-3)$

$\log_4(x-1)=\log_{(4)^{1/2}}(x-3)$

$\log_4(x-1)=2\log_4(x-3)$

$\left(\because \log_{a^n}X=\frac{1}{n}\log_a X\right)$

$\log_4(x-1)=\log_4(x-3)^2$

या $(x-1)=(x-3)^2$

$\Rightarrow x^2+9-6x=x-1$

$x^2-7x+10=0$

$(x-5)(x-2)=0$

$x=5, 2$

अतः $x=5$

$\therefore$ हलों की संख्या 1 है

(क्योंकि 2, $\log(x-3)$ को अपरिभाषित कर देगा)

105. आव्यूह $A=\begin{bmatrix}a & h & g\\ 0 & b & 0\\ 0 & c & c\end{bmatrix}$ के अभिलाक्षणिक (आइगेन) मान हैं—

The eigenvalues of the matrix $A=\begin{bmatrix}a & h & g\\ 0 & b & 0\\ 0 & c & c\end{bmatrix}$ are :

(A) a, h, g (B) a, g, c

(C) a, h, c (D) a, b, c

105. (D) $A=\begin{bmatrix}a & h & g\\ 0 & b & 0\\ 0 & c & c\end{bmatrix}$

अभिलाक्षणिक मान के लिए

$|A-\lambda I|=0$ (जहाँ λ एक अचर है)

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & h & g \\ 0 & b-\lambda & 0 \\ 0 & c & c-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$(a-\lambda)[(b-\lambda)(-\lambda)] - h[0-0] + g[0-0] = 0$

$\therefore (a-\lambda)(b-\lambda)(c-\lambda) = 0$

अतः λ के सम्भावित मान $= a, b, c$

अभिलाक्षणिक (आइगेन) मान $= a, b, c$

106. केवल एक जनक वाले चक्रीय समूह के अधिकतम हो सकते हैं—

A cyclic group having only one generator can have at most :

(A) 1 अवयव/1 element

(B) 2 अवयव/2 element

(C) 3 अवयव/3 element

(D) 4 अवयव/4 element

106. (B) यदि G के लिए g एक जनक हो, तो g का प्रतिलोम $= g^{-1}$

यदि G का केवल एक जनक है तब $g = g^{-1}$

या $g^2 = e$ (तत्समक गुण)

अतः g, G का जनक है। अर्थात् स्पष्ट है कि G के अधिकतम 2 अवयव हो सकते हैं।

107. किसी विषम-सममित आव्यूह का प्रत्येक विकर्णीय अवयव होता है—

Every diagonal element of a skew-symmetric matrix is :

(A) शून्य/zero

(B) इकाई/unity

(C) अशून्य/non-zero

(D) शुद्धतः काल्पनिक/purely imaginary

107. (A) माना A एक विषम सममित आव्यूह है

अर्थात् $A^T = -A$

या $A_{\hat{i}\hat{j}} = -A_{\hat{i}\hat{j}}$

सभी विकर्ण के अवयव के लिए

$\hat{i} = \hat{j}$

$A_{\hat{i}\hat{i}} = -A_{\hat{i}\hat{i}}$

या $2A_{\hat{i}\hat{i}} = 0$

$A_{\hat{i}\hat{i}} = 0$

अर्थात् $A_{11} = A_{22} = A_{33} \ldots\ldots = 0$

अतः किसी विषम सममित आव्यूह का प्रत्येक विकर्णीय अवयव शून्य होता है।

108. समीकरण $|x|^2 + 5|x| + 4 = 0$ के वास्तविक हलों की संख्या है—

The number of real solutions of the equations $|x|^2 + 5|x| + 4 = 0$ is :

(A) 4 (B) 2

(C) 1 (D) 0

108. (A) समी. $|x|^2 + 5|x| + 4 = 0$

प्रथम स्थिति—$x^2 - 5x + 4 = 0$

$x^2 - 4x - x + 4 = 0$

$x(x-4) - 1(x-4) = 0$

$(x-1)(x-4) = 0$

$x = 1, 4$

द्वितीय स्थिति—$x^2 + 5x + 4 = 0$

$x^2 + 4x + x + 4 = 0$

$x(x+4) + 1(x+4) = 0$

$(x+1)(x+4) = 0$

$x = -1, -4$

अतः समीकरणों के वास्तविक हल 1, 4, –4 व –1 है। अर्थात् 4 हैं।

109. अनंत श्रेणी $1 - \frac{1}{2}.\frac{1}{2} + \frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{1}{2^2} - \frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{5}{6}.\frac{1}{2^3} + \ldots\infty$ का योगफल है—

The sum of the infinite series $1 - \frac{1}{2}.\frac{1}{2} + \frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{1}{2^2} - \frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{5}{6}.\frac{1}{2^3} + \ldots\infty$ is :

(A) $\sqrt{\frac{2}{3}}$ (B) $\sqrt{\frac{1}{3}}$

(C) $\sqrt{3}$ (D) $\sqrt{\frac{3}{2}}$

109. (A) श्रेणी

$$\Rightarrow 1 - \frac{1}{2}.\frac{1}{2} + \frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{1}{2^2} - \frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{5}{6}.\frac{1}{2^3}$$

$$\Rightarrow \frac{1 - \frac{1}{2}.\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}.\left(\frac{3}{2}\right)}{2\times 1}.\frac{1}{2^2}$$

$$\frac{-\frac{1}{2}.\frac{3}{2}.\frac{5}{2}}{3\times 2\times 1}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \ldots\ldots\ \infty$$

$$1 - \frac{1}{2}.\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\frac{\left(\frac{1}{2}+1\right)}{\underline{|2}}\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$-\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\left(\frac{1}{2}+2\right)}{\underline{|3}}\frac{1}{2^3} + \ldots\ldots\ \infty$$

$$\because (1+x)^{-n} = 1 - nx + \frac{n(n+1)}{\underline{|2}}.x^2 - \frac{n(n+1)(n+2)}{\underline{|3}}.x^3 + \ldots\ldots\ \infty$$

स्पष्ट है कि $x = \frac{1}{2}$ व $n = \frac{1}{2}$

अतः श्रेणी का योग $= \left(1 + \frac{1}{2}\right)^{\frac{-1}{2}}$

$= \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{-1}{2}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$

$= \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)}$

110. समांतर श्रेढ़ी में तीन संख्याओं का योग 51 है तथा प्रथम एवं तृतीय संख्याओं का गुणनफल 273 हैं इस श्रेढ़ी का सार्व अन्तर है—

The sum of three numbers in arithmetic progression is 51 and the product of first and third terms is 273. The common difference of this progression is :

(A) 5 (B) 4

(C) 3 (D) 6

110. (B) माना समान्तर श्रेढ़ी की तीन संख्याएँ $a-d$, a, $a+d$ हैं।

प्रश्नानुसार, $a - d + a + a + d = 51$

$3a = 51$

$a = 17$

तथा $(a-d)\times(a+d) = 273$

$a^2 - d^2 = 273$

$d^2 = 17^2 - 273$

$d^2 = 289 - 273$

$d^2 = 16$

$d = \pm 4$

श्रेणी की संख्याएँ 13, 17, 21

तथा सर्वान्तर $= 17 - 13 = 4$

111. दो अंकों का हरात्मक माध्य 4 है। यदि उनके समांतर माध्य A तथा गुणोत्तर माध्य G, समीकरण $2A + G^2 = 27$ को सन्तुष्ट करते हैं, तो अंक हैं—

The harmonic mean of two numbers is 4. If their arithmetic mean A and geometric mean G satisfy the equation $2A + G^2 = 27$, then the numbers are :

(A) 1, 3

(B) 1, 4

(C) 3, 6

(D) उपर्युक्त में से कोई नहीं/None of the above

111. (C) माना अंक a व b हैं।

$\therefore$ हरात्मक माध्य = 4

$\therefore \frac{2ab}{a+b} = 4$

या $ab = 2(a+b)$ ...(i)

तब समान्तर माध्य $A = \frac{a+b}{2}$

$= \frac{ab}{4}$ ...(ii)

व गुणोत्तर माध्य $G = \sqrt{ab}$ ...(iii)

क्योंकि A व G समीकरण $2A + G^2 = 27$ को सन्तुष्ट करते हैं।

अतः $2.\frac{ab}{4} + ab = 27$

$\frac{3ab}{2} = 27$

$ab = 18$ ...(iv)

समी. (i) से, $a + b = \frac{ab}{2} = \frac{18}{2}$

$a + b = 9$ ...(v)

$$\therefore \quad a - b = \sqrt{(a+b)^2 - 4ab}$$
$$= \sqrt{9^2 - 4\times 18}$$
$$= \sqrt{81-72} = \sqrt{9}$$
$$a - b = 3 \quad ...(vi)$$
समी. (v) व (vi) से,
$$a = 6$$
व $$b = 3$$
अतः अंक 3 व 6 हैं।

112. मान लीजिए कि A का 3 × 3 आव्यूह है, जिसके अभिलाक्षणिक (आइगेन) मान 1, –1, 0 हैं। तब $|I + A^{100}|$ का मान है—

Let A be a 3 × 3 matrix with eigenvalues 1, – 1, 0. Then the value of $|I + A^{100}|$ is :

(A) 6 (B) 8

(C) 4 (D) 100

112. (C) वर्ग आव्यूह के अभिलाक्षणिक मान $\lambda = 1, -1, 0$

तब $|I + A^{100}| = |1 + \lambda^{100}|$

अतः $\lambda = 1$ पर $= |1 + (1)^{100}| = 2$

$\lambda = -1$ पर $= |1 + (-1)^{100}| = 2$

तथा $\lambda = 0$ पर $= |1 + 0| = 1$

अतः $|I + A^{100}|$ का मान
$$= 2 \times 2 \times 1$$
$$= 4$$

113. मान लीजिए कि सर्वसमिका अवयव e के साथ G एक समूह है। मान लीजिए कि $a, b \in G$ इस प्रकार है कि $a^5 = e$ तथा $aba^{-1} = b^2$ तब $o(b)$ है—

Let G be a group with identity element e. Let $a, b \in G$ be such that $a^5 = e$ and $aba^{-1} = b^2$. Then $o(b)$ is :

(A) 17 (B) 23

(C) 29 (D) 31

113. (D) दिया है, $aba^{-1} = b^2$

दोनों ओर वर्ग करने पर,
$$(aba^{-1})^2 = b^4$$
$$(aba^{-1})(aba^{-1}) = b^4$$
$$ab(aa^{-1})ba^{-1} = b^4$$
$$ab^2a^{-1} = b^4$$
$$a(aba^{-1})a^{-1} = b^4 (\because b^2 = aba^{-1})$$
$$a^2ba^{-2} = b^4$$
पुनः वर्ग करने पर,
$$(a^2ba^{-2})(a^2ba^{-2}) = b^8$$
$$a^2b(a^2a^{-2})ba^{-2} = b^8$$
$$a^2b^2a^{-2} = b^8$$
$$a^2(aba^{-1})a^{-2} = b^8$$
$$a^3ba^{-3} = b^8$$
तथा $(a^3ba^{-3})(a^3ba^{-3}) = b^{16}$
$$a^4b^2a^{-4} = b^{16}$$
$$a^4(aba^{-1})a^{-4} = b^{16}$$
$$a^4ba^{-4} = b^{16}$$
और $(a^4ba^{-4})(a^4ba^{-4}) = b^{32}$
$$a^5ba^{-5} = b^{32}$$
इस प्रकार समीकरण से $0(b) = (32 - 1) = 31$ प्राप्त होता है।

114. प्रत्येक वर्ग आव्यूह को व्यक्त किया जा सकता है—

Every square matrix can be expressed as :

(A) एक हर्मिटी आव्यूह के रूप में/a Hermitian matrix

(B) एक विषम-सममित आव्यूह के रूप में/a skew-symmetric matrix

(C) सममित तथा विषम-सममित आव्यूहों के योग के रूप में/sum of symmetric and skew-symmetric matrices

(D) उपर्युक्त में से कोई नहीं/None of the above

114. (C) माना A एक वर्ग आव्यूह है।

तब $A = \frac{1}{2}(A + A') + \frac{1}{2}(A - A')$

माना $P = \frac{1}{2}(A + A')$ व $Q = \frac{1}{2}(A - A')$

$$\therefore P' = \left[\frac{1}{2}(A + A')\right]^1$$
$$= \frac{1}{2}(A' + (A')') = P$$
$$P' = \frac{1}{2}(A + A')$$
अतः P एक सममित आव्यूह है।

इसी प्रकार,
$$Q' = \left[\frac{1}{2}(A - A')\right]^1$$
$$Q' = \frac{1}{2}[A' - (A')'] = -\frac{1}{2}(A - A')$$
$$= -Q$$
अतः Q एक विषम सममित आव्यूह है।

अतः प्रत्येक वर्ग आव्यूह को एक सममित व विषम सममित आव्यूह योग के रूप में लिखा जा सकता है।

115. अनंत श्रेणी
$$\frac{1}{\underline{|2}} + \frac{1+2}{\underline{|3}} + \frac{1+2+3}{\underline{|4}} + \frac{1+2+3+4}{\underline{|5}} + ...\infty$$
का योगफल है—

The sum of the infinite series
$$\frac{1}{\underline{|2}} + \frac{1+2}{\underline{|3}} + \frac{1+2+3}{\underline{|4}} + \frac{1+2+3+4}{\underline{|5}} + ...\infty$$
is :

(A) $2e$ (B) $3e$

(C) $\frac{3e}{2}$ (D) $\frac{e}{2}$

115. (D) श्रेणी
$$\frac{1}{\underline{|2}} + \frac{1+2}{\underline{|3}} + \frac{1+2+3}{\underline{|4}} + \frac{1+2+3+4}{\underline{|5}} + ...\infty$$
श्रेणी का nवाँ पद
$$T_n = \frac{1+2+3+4+.........n}{\underline{|n+1}}$$
$$= \frac{\frac{n}{2}(n+1)}{\underline{|n+1}}$$
$$= \frac{n(n+1)}{2(n+1)(n)\underline{|n-1}}$$
$$T_n = \frac{1}{2\underline{|n-1}}$$
$n = 1, 2, 3, 4$ .... रखने पर
$$T_1 = \frac{1}{2\underline{|1-1}} = \frac{1}{2\underline{|0}} = \frac{1}{2}$$
$$T_2 = \frac{1}{2\underline{|2-1}} = \frac{1}{2\underline{|1}}$$
$$T_3 = \frac{1}{2\underline{|3-1}} = \frac{1}{2\underline{|2}}$$
सभी पदों को अनन्त तक जोड़ने पर,
$$T_1 + T_2 + T_3 + ...\infty$$
$$= \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{\underline{|1}} + \frac{1}{\underline{|2}} + ...\infty\right]$$
$$S_\infty = \frac{1}{2}[e]$$
$$\left[\because e^x = 1 + \frac{x}{\underline{|1}} + \frac{x^2}{\underline{|2}} + ...\right]$$
$$S_\infty = \frac{e}{2}$$

116. आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ के अभिलाक्षणिक मूल हैं—

The characteristic roots of the matrix $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ are :

(A) 1, 6 (B) –1, 6

(C) –1, – 6 (D) 1, – 6

116. (A) $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

आव्यूह के अभिलाक्षणिक मूल के लिए

$|A - \lambda I| = 0$ (जहाँ λ एक अचर है।)
$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$
$$(5 - \lambda)(2 - \lambda) - 4 = 0$$
$$10 - 5\lambda - 2\lambda + \lambda^2 - 4 = 0$$
$$\lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0$$
$$\lambda^2 - \lambda - 6\lambda + 6 = 0$$
$$\lambda(\lambda - 1) - 6(\lambda - 1) = 0$$
$$(\lambda - 1)(\lambda - 6) = 0$$

$\lambda = 1, 6$

अतः अभिलाक्षणिक मूल = 1, 6

117. वर्ग आव्यूह A एवं B के लिए निम्न में से कौन-सा सत्य है ?

For square matrices A and B, which of the following is true ?

(A) $(AB)' = A'B'$

(B) $(A + B)' = A' + B'$

(C) $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$

(D) $(A + B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$

117. (B) यदि A व B वर्ग आव्यूह हैं तो $(A + B)' = A' + B'$ स्थिति सम्भव होगी।

118. एक हर्मिटी आव्यूह के अभिलाक्षणिक मूल होते हैं–

The characteristic roots of a Hermitian matrix are :

(A) वास्तविक/real

(B) शुद्धतः काल्पनिक/purely imaginary

(C) सम्मिश्र संख्याएँ/complex numbers

(D) उपर्युक्त में से कोई नहीं/None of the above

118. (A) एक सम्मिश्र आव्यूह A तब एक हर्मिटी आव्यूह होता है, यदि यह इसके संयुग्मी पक्षान्तर के बराबर होता है।

अर्थात्, $A = (A^*)'$

जहाँ A^* संयुग्मी आव्यूह है।

माना $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

तब $A = (A^*)'$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{bmatrix}$$

अर्थात् $a = a^*$

$d = d^*$

यह स्थिति तभी सम्भव है जब समिश्र संख्या एक शुद्ध वास्तविक संख्या हो।

अतः हर्मिटी आव्यूह के अभिलाक्षणिक मूल वास्तविक होते हैं।

119. चक्रीय समूह $\{a, a^2, a^3, a^4 = e\}$ का/के जनक है/हैं–

The generator/generators of the cyclic group $\{a, a^2, a^3, a^4 = e\}$ is/ are :

(A) a^4 (B) a^2

(C) a^4, a^2 (D) a, a^3

119. (D) चक्रीय समूह (G) = $\{a, a^2, a^3, a^4 = e\}$

समूह की कोटि $o(G) = 4$

अतः a^k एक जनक है यदि K सापेक्षिक अभाज्य हो, तो

अतः 4 के लिए सापेक्षिक अभाज्य संख्या 1 व 3 है।

अतः a, a^3 चक्रीय समूह के जनक हैं।

120. सारणिक $\begin{vmatrix} 43 & 1 & 6 \\ 35 & 7 & 4 \\ 17 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ का मान है–

The value of the determinant $\begin{vmatrix} 43 & 1 & 6 \\ 35 & 7 & 4 \\ 17 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ is :

(A) 0 (B) 56

(C) 756 (D) 964

120. (A) $A = \begin{vmatrix} 43 & 1 & 6 \\ 35 & 7 & 4 \\ 17 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ (माना)

संक्रिया $C_1 \to C_1 - C_2$ से

$$A = \begin{vmatrix} 42 & 1 & 6 \\ 28 & 7 & 4 \\ 14 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

C_1 से 7 उभयनिष्ठ लेने पर,

$$A = 7\begin{vmatrix} 6 & 1 & 6 \\ 4 & 7 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$\because$ किसी सारणिक के दो पंक्ति या स्तम्भ समान हो, तो सारणिक का मान शून्य होता है।

$\therefore$ यहाँ $C_1 = C_3$

अतः $A = 0$

❑❑