AGRAWAL EXAMCART

Paper Pakka Fasega!

TOP SELLING PGT PRACTICE SETS

उत्तर प्रदेश माध्यमिक शिक्षा सेवा चयन बोर्ड द्वारा आयोजित

PGT

प्रवक्ता चयन परीक्षा

Most Updated Book!

UP PGT के सभी नवीनतम पेपर्स इस पुस्तक में शामिल हैं।

गणित

15 सॉल्व्ड प्रैक्टिस सेट्स

एवं 04 सॉल्व्ड पेपर्स

(2021, 2019, 2016, 2015)

Code	Price	Pages
CB1000	₹ 299	380

विषय-सूची

Student's Corner *पृष्ठ संख्या*

सॉल्व्ड पेपर्स

प्रैक्टिस सेट्स

प्रवक्ता चयन परीक्षा–2021
गणित
हल प्रश्न-पत्र

परीक्षा तिथि : 17-08-2021

1. श्रेणी $\frac{1}{1.2}-\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}-\frac{1}{4.5}+\ldots\ldots$ का योगफल है—

Sum of the series

$\frac{1}{1.2}-\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}-\frac{1}{4.5}+\ldots\ldots$

(A) 2log 2 – 1
(B) 2log 2 – 3
(C) 2log 2
(D) उपर्युक्त में से कोई नहीं/None of the above

1. (A) दिया है, श्रेणी

$\frac{1}{1.2}-\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}-\frac{1}{4.5}+\ldots\ldots$

$\left(1-\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\ldots\ldots$

आंशिक भिन्न का प्रयोग करने पर,

$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots..$

$1-\frac{2}{2}+\frac{2}{3}-\frac{2}{4}+\frac{2}{5}+\ldots..$

$1+2\left(\frac{-1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots..\right)$

$1+2\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots..\right)-2$

(एक जोड़ने तथा घटाने पर)

हम जानते हैं, $\log(1+x)$

$= x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}+\ldots..$

$x = 1$ रखने पर,

$\log(1 + 1) = \log 2$

$= 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots..$

अतः समी. एक से 2log 2 – 1

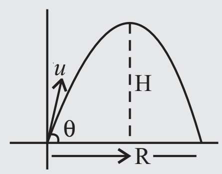
2. यदि किसी प्रक्षेप्य का क्षैतिज परास, प्राप्त की गई महत्तम ऊँचाई के बराबर हो, तो उसका प्रक्षेप्य कोण है—

If the horizontal range of a projectile is equal to its gained maximum height, then its angle of projection is

(A) $\frac{\pi}{4}$ (B) $\tan^{-1}2$

(C) $\tan^{-1}4$ (D) $\frac{\pi}{3}$

2. (C) दिया है, क्षैतिज परास R = महत्तम ऊँचाई = H



हम जानते हैं, क्षैतिज परास, $R = \frac{u^2\sin 2\theta}{g}$

महत्तम ऊँचाई $H = \frac{u^2\sin^2\theta}{2g}$

$\Rightarrow \frac{u^2\sin 2\theta}{g} = \frac{u^2\sin^2\theta}{2g}$

$\Rightarrow 2\sin\theta\cos\theta = \frac{\sin^2\theta}{2}$

$\Rightarrow 4\cos\theta = \sin\theta$

$\tan\theta = 4$

$\theta = \tan^{-1}4$

3. $e^{\sin(x+iy)}$ का वास्तविक भाग है—

The real part of $e^{\sin(x+iy)}$ is

(A) $e^{\sin x\cosh y}[\cos(\cos x\sinh y)]$
(B) $e^{\sin x\cosh y}[\sin(\cos x\sinh y)]$
(C) $e^{\cos x\sinh y}[\cos(\cos x\sinh y)]$
(D) $e^{\cos x\sinh y}[\sin(\cos x\sinh y)]$

3. (A) दिया है, $e^{\sin(x+iy)}$

हम जानते हैं, $\sin(a + b)$

$= \sin a\cos b + \cos b\sin b$

अतः $e^{\sin x\cos iy + \cos x\sin iy}$

तथा $\sin ix = i\sinh x$ का प्रयोग करने से

$\cos ix = \cosh x$

$e^{\sin x\cosh y + \cos x\, i\sinh y}$

$e^{\sin x\cosh y}.e^{\sin x.\, i\sinh y}$

$e^{\sin x\cosh y}[e^{i\cos x\sinh y}]$

हम जानते हैं,

$e^{ix} = \cos x + i\sin x$

इसलिये $e^{\sin x\cosh y}[\cos(\cos x\sinh y) + i\sin(\cos x\sinh y)]$

अतः वास्तविक भाग $e^{\sin x\cosh y}[\cos(\cos x\sinh y)]$ होगा।

4. $\sinh(x + iy)$ बराबर है—

$\sinh(x + iy)$ is equal to

(A) $\sin x\cosh y + i\cosh x\sin y$
(B) $\sinh x\cos y + i\cosh x\sin y$
(C) $\sin x\cosh y - i\cosh x\sin y$
(D) $\sinh x\cos y - i\cosh x\sin y$

4. (B) दिया है, $\sinh(x + iy)$

हम जानते हैं, $\sinh x = -i\sin ix$

अतः $-i\sin i(x + iy)$

$-i\sin(ix + i^2y)$

$-i\sin(-y + ix)$

$\sin(a + b)$ का प्रयोग करने से

$-i[\sin(-y)\cos ix + \cos(-y) + \sin ix]$

$-i[\cos y\sin ix - \cos ix\sin y]$

परन्तु $\sin ix = i\sinh x$

अतः $-i[i\sinh x\cos y - \cosh x\sin y]$

$\Rightarrow -i^2\sinh x\cos y + i\cosh x\sin y$

$\Rightarrow \sinh x\cos y + i\cosh x\sin y$

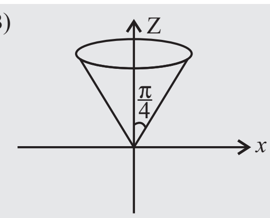
5. शीर्ष मूलबिन्दु पर, अक्ष z-अक्ष तथा अर्द्धशीर्ष कोण $\frac{\pi}{4}$ के एक लम्ब वृत्तीय शंकु का समीकरण है—

The equation of a right circular control with vertex at the origin the axis the z-axis and semi vertical angle $\frac{\pi}{4}$ is

(A) $x^2 + z^2 = y^2$ (B) $y^2 + x^2 = z^2$

(C) $z^2 + y^2 = x^2$ (D) $xy = z^2$

5. (B)



हम जानते हैं, $x^2 + y^2 = z^2\tan^2\theta$

जहाँ $\theta = \tan\frac{\pi}{4}$

अतः $x^2 + y^2 = z^2\tan^2\frac{\pi}{4}$

$x^2 + y^2 = z^2$

6. $\lim\limits_{(x,y)\to(2,1)}\frac{\sin^{-1}(xy-2)}{\tan^{-1}(3xy-6)}$ का मान है—

$\lim\limits_{(x,y)\to(2,1)}\frac{\sin^{-1}(xy-2)}{\tan^{-1}(3xy-6)}$ is equal to

(A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{1}{2}$

(C) 1 (D) 2

6. (A) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,1)} \dfrac{\sin^{-1}(xy-2)}{\tan^{-1}(3xy-6)}$

$x-2 = X$

$y-1 = Y$ रखने पर

$$\lim_{(X,Y)\to(0,0)} \frac{\sin^{-1}[(X+2)(Y+2)-2]}{\tan^{-1}[3(X+2)(Y+2)-6]}$$

$$\lim_{(X,Y)\to(0,0)} \frac{\sin^{-1}[(X+2)(Y+2)-2]}{(X+2)(Y+2)-2}$$

$$\times \frac{[3(X+2)(Y+2)-6]}{\tan^{-1}[3(X+2)(Y+2)-6]}$$

$$\times \left[\frac{(X+2)(Y+21-2)}{3[X+2][Y+2]-6}\right]$$

$$\left[\text{हम जानते हैं, } \lim_{x\to 0} \frac{\sin^{-1}x}{x} = 1\right.$$

$$\left.\lim_{x\to 0} \frac{\tan^{-1}x}{x} = 1\right]$$

अतः $= \dfrac{1}{3}$

7. वास्तविक संख्याओं के ऊपर समिश्र संख्याओं के सदिश समष्टि C(R) की विमा है—

The dimension of the vector space C(R) of the complex number over real numbers is

(A) 1 (B) 2
(C) 3 (D) 4

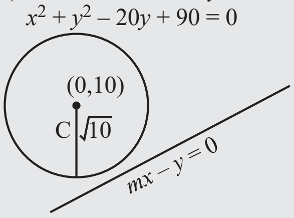
7. (B) वास्तविक संख्याओं के ऊपर समिश्र संख्याओं के सदिश समष्टि C(R) की विमा 2 होती है।

8. यदि सरल रेखा $y = mx$, वृत्त $x^2 + y^2 - 20y + 90 = 0$ के बाहर स्थित है, तो m का मान संतुष्ट करेगा—

If the straight line $y = mx$ lies outside the circle $x^2 + y^2 - 20y + 90 = 0$, then the value of m will satisfy

(A) $|m| < 3$ (B) $m < 3$
(C) $m > 3$ (D) $|m| > 3$

8. (A) दिया है, सरल रेखा $y = mx$ तथा वृत्त $x^2 + y^2 - 20y + 90 = 0$



वृत्त के समी. की तुलना $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ से करने पर,

$2g = 0, g = 0$

$2f = -20$

$f = -10$

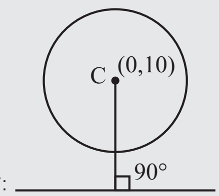
केन्द्र $= (-g, -f) \Rightarrow (0, 10)$

त्रिज्या $= \sqrt{g^2 + f^2 - c}$

$= \sqrt{0 + 100 - 90}$

$= \sqrt{10}$

अतः



$mx - y = 0$

अतः चित्र से ज्ञात है कि बिन्दु (0, 10) से रेखा $mx - y = 0$ पर डाले गये लम्ब की लम्बाई त्रिज्या से बड़ी होगी।

अतः $\left|\dfrac{m \times 0 - 10}{\sqrt{m^2+1}}\right| > \sqrt{10}$

$$\frac{10}{\sqrt{m^2+1}} > \sqrt{10}$$

$$\sqrt{m^2+1} < \sqrt{10}$$

$$m^2 + 1 < 10$$

$$m^2 < 9$$

$$|m| < 3$$

9. श्रेणी $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + ... + \dfrac{1}{4n}\right]$ के योग का मान है—

The sum of the series

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{4n}\right]$$

is equal to

(A) 0 (B) 1
(C) log3 (D) log4

9. (D) दिया है, श्रेणी

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{4n}\right]$$

श्रेणी का योग निकालने पर,

$$\Rightarrow \frac{1}{n+0} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... \frac{1}{n+3n}$$

$$\sum_{r=0}^{3n} \frac{1}{n+r}$$

$$\frac{1}{n}\sum_{r=0}^{3n} \frac{1}{1+\frac{r}{n}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{r=0}^{3n} \frac{1}{1+\frac{r}{n}}$$

$$\frac{1}{n}\lim_{n\to\infty}\sum_{r=0}^{3n} \frac{1}{1+\frac{r}{n}}$$

$$\int_0^3 \frac{1}{1+x}dx$$

निर्दिष्ट समाकलन का प्रयोग करने से

अतः $\log[1+x]_0^3 = \log 4$

10. xy-तल पर, परवलय $y^2 = x$ के अनुदिश बिन्दु (0, 0) से (1, 1) तक बल $\vec{F} = (x^2 - y^2 + x)\hat{i} - (2xy + y)\hat{j}$, द्वारा किया गया कार्य है—

The work done by the force $\vec{F} = (x^2 - y^2 + x)\hat{i} - (2xy + y)\hat{j}$, displacing a particle in the xy plane from (0, 0) to (1, 1) along the parabola $y^2 = x$, is

(A) 2

(B) 3

(C) $\dfrac{1}{3}$

(D) इसमें से कोई नहीं/none of these

10. (D) दिया है,

$$\vec{F} = (x^2 - y^2 + x)\hat{i} - (2xy + y)\hat{j}$$

तथा $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$

$d\vec{r} = dx\hat{i} + hy\hat{j}$

हम जानते हैं, $W = \int \vec{F}.d\vec{r}$

$$\vec{F}.d\vec{r} = [(x^2 - y^2 - x)\hat{i} - (2xy + y)\hat{j}]$$
$$[dx\hat{i} + dy\hat{j}]$$

$$\vec{F}.d\vec{r} = (x^2 - y^2 + x)dx - (2xy + y)dy$$

$$W = \int_0^1 (x^2 - y^2 + x)dx - \int_0^1 (2xy + y)dy$$

दिया है, $y^2 = x$

अतः $W = \int_0^1 (x^2 - x + x)dx$

$$- \int_0^1 (2y \times y^2 + y)dy$$

$$W = \int_0^1 x^2 dx - \int_0^1 (2y^3 + y)dy$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 - \left[\frac{2y^4}{4} + \frac{y^2}{2}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{3} - \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right] \Rightarrow \frac{1}{3} - 1 = \frac{-2}{3}$$

11. आव्यूह $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ के भिन्न आइगेन मान हैं—

The distinct eigen values of the matrix $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ are

(A) 0, 1 (B) 1, –1
(C) 0, 2 (D) 1, 2

11. (C) दिया है, आव्यूह $\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}1-\lambda & 1 & 0\\ 1 & 1-\lambda & 0\\ 0 & 0 & -\lambda\end{bmatrix}$$

$$[A - \lambda I] = (1-\lambda)[-\lambda(1-\lambda)] - 1(-\lambda) - 0$$

आइगेन मान के लिये $|A - \lambda I| = 0$

$$-\lambda(1-\lambda)^2 + \lambda = 0$$
$$\lambda[(1-\lambda)^2 + 1] = 0$$
$$\lambda[1 + \lambda^2 - 2\lambda - 1] = 0$$
$$\lambda[\lambda^2 - 2\lambda] = 0$$
$$\lambda \times \lambda(\lambda - 2) = 0$$
$$\lambda^2(\lambda - 2) = 0$$

अत: $\lambda = 0$, $\lambda = 2$

12. समीकरण $x^2(y - px) = p^2y$ का व्यापक हल है, जहाँ $p = \frac{dy}{dx}$

General solution of $x^2(y - px) = p^2y$ where $p = \frac{dy}{dx}$ is

(A) $y^2 - c^2 = 2cx^3$ (B) $x^2(y - cx) = c^2y$
(C) $xy^2 = cx^4 + c^2$ (D) $y^2 = cx^2 + c^2$

12. (D) दिया है, $x^2(y - px) = p^2y$

$$y - px = \frac{p^2y}{x^2}$$

$$y = px + \frac{p^2y}{x^2} \quad ...(1)$$

y से गुणा करने पर,

$$y^2 = \left(\frac{p}{x} + y\right) + \left(\frac{p}{x}y\right)^2$$

माना $x^2 = u, y^2 = v$

$2xdx = du, 2ydy = dv$

$$\frac{dv}{du} = \frac{2y}{2x} \times \frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{du} = \frac{y}{x}\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dv}{du} = \frac{y}{x}p$$

$$p = \left[p = \frac{dv}{du}\right]$$

$$v = px^2 + p^2$$

$$y^2 = cx^2 + c^2$$

13. माना $(z, 0)$ एक क्रम विनिमय समूह है, जिसमें $a, b \in z$, $a \circ b \overset{\text{det}}{=} a + b + 1$ से परिभाषित है। माना a का व्युत्क्रम a' है, तो a' का मान है–

Let $(z, 0)$, where $a \circ b \overset{\text{det}}{=} a + b + 1$, $a, b \in z$ is a commutative group. Let a' be inverse of a, then a' is equal to

(A) $-a + 1$ (B) $-a - 1$
(C) $-a - 2$ (D) $-a + 2$

13. (C) दिया है, $a \circ b = a + b + 1$

$a \circ e = a$

$a \circ e = a + e + 1$

$\because$ $a + e + 1 = a$

$e = -1$

अत: $a \circ a' = -1$

$a \circ a' = a + a' + 1$

$\therefore$ $a + a' + 1 = -1$

$a' = -a - 2$

14. यदि समीकरण $x^3 - 5x^2 - 16x + 80 = 0$ के दो मूल 4 तथा – 4 हैं, तो इस समीकरण का तीसरा मूल है–

If the two roots of the equation $x^3 - 5x^2 - 16x + 80 = 0$ are 4 and – 4, then the third root of this equation is

(A) 1 (B) 2
(C) 6 (D) 5

14. (D) दिया है, $x^3 - 5x^2 - 16x + 80 = 0$ के मूल 4, – 4 हैं।

मूलों का गुणनफल $= 4 \times -4 \times \alpha = -80$

$$\alpha = \frac{-80}{-16}$$

$$\alpha = 5$$

15. एक अर्द्धगोला अपने बराबर अर्द्धव्यास वाले गोले के ऊपर साम्यावस्था के विराम में है यदि अर्द्धगोले का चपटा तल गोले पर विराम में है, तो यह साम्यावस्था है–

A hemisphere rests in equilibrium on a sphere of equal radius. If the flat surface of the hemisphere rests on the sphere, then this equilibrium is

(A) स्थाई/Stable
(B) अस्थाई/Unstable
(C) उदासीन/Neutral
(D) उपर्युक्त में से कोई नहीं/None of the above

15. (A) स्थाई साम्यावस्था होगी।

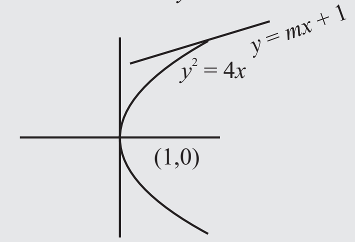
16. रेखा $y = mx + 1$ परवलय $y^2 = 4x$ की स्पर्श रेखा है, यदि

The line $y = mx + 1$ is a tangent to the parabola $y^2 = 4x$, if

(A) $m = 1$ (B) $m = 2$
(C) $m = -1$ (D) $m = -2$

16. (C) दिया है, रेखा $y = mx + 1$

तथा परवलय $y^2 = 4x$



हम जानते हैं, कि यदि कोई सरल रेखा परवलय को स्पर्श करती है तब $1 = \frac{a}{m}$

$y^2 = 4ax$ से तुलना करने पर

$4a = 4$

$a = 1$

$y = mx + 1, 1 = 1$

अत: $1 = \frac{a}{m} \Rightarrow 1 = \frac{1}{m} \Rightarrow m = 1$

17. $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$ का मान है–

$\int_0^\infty e^{-x^2} dx$ is equal to

(A) $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ (B) $\frac{\pi}{2}$

(C) $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ (D) π

17. (A) दिया है, $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$

माना, $x^2 = t$ $\quad x \to 0, t \to 0$

$2xdx = dt$ $\quad x \to \infty, t \to \infty$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-t}dt}{2\sqrt{t}} \Rightarrow \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{e^{-t}dt}{\sqrt{t}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-t}t^{-\frac{1}{2}}dt$$

गामा फलन का प्रयोग करने से ज्ञात है।

$$\Gamma n = \int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}dx$$

अत: $\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-t}t^{\left(\frac{1}{2}-1\right)}dt$

$$\therefore \frac{1}{2} \times \Gamma\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times \sqrt{\pi}$$

18. a त्रिज्या तथा M द्रव्यमान की एक वलय का जड़त्व आघूर्ण केन्द्र से जाने वाली तथा इसके समतल पर लम्बवत् रेखा के सापेक्ष है–

The moment of inertia of a circular ring of radius a and mass M about an axis through the centre perpendicular its plane is

(A) $\frac{1}{2}Ma^2$ (B) Ma^2

(C) $\frac{3}{2}Ma^2$ (D) $\frac{4}{3}Ma^2$

18. (C) I_{AB} = वलय का जड़त्व आघूर्ण केन्द्र से जाने वाली तथा इसके समतल पर लम्बवत् रेखा के सापेक्ष

अतः $I_{AB} = I_Z + Ma^2$

$= \frac{1}{2}Ma^2 + Ma^2$

$I_{AB} = \frac{3}{2}Ma^2$

19. आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ के आइगेन मान है–

The eigen values of the matrix $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ are

(A) 6, 0 (B) 3, 2

(C) 6, 1 (D) 1, 2

19. (C) दिया है, आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 1 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

$$|A - \lambda I| = (5-\lambda)(2-\lambda) - 4$$

आइगेन मान के लिये $|A - \lambda I| = 0$

अतः $(5-\lambda)(2-\lambda) - 4 = 0$

$10 - 7\lambda + \lambda^2 - 4 = 0$

$\lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0$

$\lambda^2 - 6\lambda - \lambda + 6 = 0$

$\lambda(\lambda - 6) - 1(\lambda - 6) = 0$

$(\lambda - 1)(\lambda - 6) = 0$

$\lambda = 1, 6$

20. यदि $f(x) = \frac{x+2}{x+3}$ और $y = f^{-1}(x)$, तो $\frac{dy}{dx}$ बराहर है–

If $f(x) = \frac{x+2}{x+3}$ and $y = f^{-1}(x)$, then $\frac{dy}{dx}$ is equal to

(A) $\frac{2}{(x+3)^2}$ (B) $\frac{1}{(x-1)^2}$

(C) $\frac{x-2}{x-3}$ (D) $\frac{1}{(x+1)^2}$

20. (B) दिया है, $f(x) = \frac{x+2}{x+3}, y = f^{-1}(x)$

$f^{-1}(x)$ के लिये

$$\frac{x+2}{x+3} = y$$

$\Rightarrow \quad x + 2 = xy + 3y$

$\Rightarrow \quad x - xy = 3y - 2$

$\Rightarrow x(1-y) = 3y - 2$

$$x = \frac{3y-2}{1-y}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{3x-2}{1-x}$$

अतः $y = f^{-1}(x) = \frac{3x-2}{1-x}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1-x)\times 3}{(1-x)2} + (3x+2)$$

$$= \frac{3-3x+3x-2}{(x-1)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(x-1)^2}$$

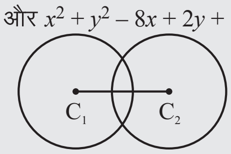
21. वृत्त $(x-1)^2 + (y-3)^2 = r^2$ और $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 8 = 0$ दो विभिन्न बिन्दुओं पर प्रतिच्छेदन करते हैं। निम्नलिखित में कौन सही है–

The circles $(x-1)^2 + (y-3)^2 = r^2$ and $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 8 = 0$ intersect at two distinct points. Which of the following is correct.

(A) $r = 1$ (B) $1 < r < 1$

(C) $r = 2$ (D) $2 < r < 8$

21. (D) दिया है, वृत्त $(x-1)^2 + (y-3)^2 = r^2$ और $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 8 = 0$



यदि दो वृत्त एक दूसरे को 2 विभिन्न बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करते हैं।

तब $C_1C_2 < r_1 + r_2$

पहले वृत्त का केन्द्र (1, 3) तथा त्रिज्या r है।

दूसरे वृत्त के लिये

$x^2 + y^2 - 8x + 2y + 8 = 0$

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

$2g = -8, 2f = 2, c = 8$

$g = -4, f = 1$

$C_2(4, -1), r = \sqrt{g^2 + f^2 - c}$

$r = \sqrt{16 + 1 - 8}$

$r = 3$

अतः $C_1C_2 = \sqrt{(1-4)^2 + (3+1)^2}$

$= \sqrt{9+16} = 5$

$\therefore \quad 5 < 3 + r$

$r > 2$

22. यदि $y = \sin(\log x)$, तो निम्नलिखित में कौन सही है ?

If $y = \sin(\log x)$, then which of the following is correct ?

(A) $\frac{d^2y}{dx^2} + xy = 0$

(B) $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$

(C) $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + y = 0$

(D) $x^2\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + y = 0$

22. (C) दिया है, $y = \sin(\log x)$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = \cos(\log x) \times \frac{1}{x}$$

$$x\frac{dy}{dx} = \cos(\log x)$$

पुनः x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = \frac{-\sin\log(x)}{x}$$

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} = -y$$

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + y = 0$$

23. यदि B एक आव्यूह इस प्रकार है कि $B^2 = B$ और $A = I - B$, तो निम्नलिखित में कौन सही नहीं है ?

If B is matrix such that $B^2 = B$ and $A = I - B$, then which of the following is not correct ?

(A) $A^2 = A$ (B) $A^2 = I$

(C) $AB = 0$ (D) $BA = 0$

23. (B) दिया है, $B^2 = B, A = I - B$

$A = I - B$

दोनों तरफ वर्ग करने पर,

$A^2 = (I - B)^2 = I^2 + B^2 - B - B$

$= I^2 + B - 2B$

दिया है, $B^2 = B$

अतः $A^2 = I^2 + B - B$

$= (I - B) = A \Rightarrow A^2 = A$

अतः $A^2 = I$ उत्तर सही नहीं होगा।

24. रेखा समूह $y = k(x-1), k \in R$, की लंककोणीय समछेदी का समीकरण है–

The orthogonal trajectories to the family of straight lines $y = k(x-1), k \in R$, are given by

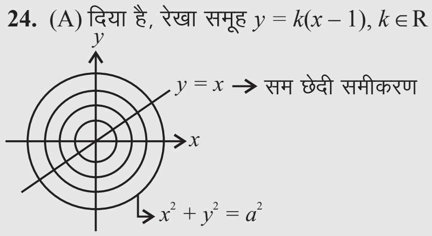
(A) $(x-1)^2 + y^2 = c^2$

(B) $(x-1)^2 + (y-1)^2 = c^2$

(C) $ky + x - 1 = 0$

(D) $x^2 + y^2 = c^2$

24. (A) दिया है, रेखा समूह $y = k(x-1),\ k \in R$



$$y = k(x-1) \Rightarrow k = \frac{y}{x-1}$$

$$\frac{dy}{dx} = k \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{(x-1)}$$

$$\frac{-dx}{dy} = \frac{y}{x-1}$$

$$(x-1)dx = -(ydy)$$

दोनों तरफ समाकलन करने पर,

$$\int (x-1)dx = -\int ydy$$

$$\frac{x^2}{2} - x + \frac{y^2}{2} = c$$

$$x^2 - 2x + y^2 = 2c$$

$$(x-1)^2 + y^2 = 2c + 1 \Rightarrow c^2$$

$$(x-1)^2 + y^2 = c^2$$

25. यदि $A = f(x) = \begin{bmatrix} \cos x & \sin x & 0 \\ -\sin x & \cos x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, तो

A^{-1} है–

If $A = f(x) = \begin{bmatrix} \cos x & \sin x & 0 \\ -\sin x & \cos x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, then

A^{-1} is

(A) $f(x)$ (B) $-f(x)$

(C) $f(-x)$ (D) $-f(-x)$

25. (C) दिया है, $A = f(x)$

$$= \begin{bmatrix} \cos x & \sin x & 0 \\ -\sin x & \cos x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$f(-x) = \begin{bmatrix} \cos(-x) & \sin(-x) & 0 \\ -\sin(-x) & \cos(-x) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$f(-x) = \begin{bmatrix} \cos x & -\sin x & 0 \\ +\sin x & \cos x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$f(x) \times f(-x) = \begin{bmatrix} \cos x & \sin x & 0 \\ -\sin x & \cos x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cos x & -\sin x & 0 \\ \sin x & \cos x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$f(x) \times f(-x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow f(x) \times f(-x) = I$

हम जानते हैं यदि $AB = I$

$\therefore\ A^{-1} = B$

अतः $A^{-1} = f(-x)$

26. A और B एक पांसा फेंकते हैं। B द्वारा फेंकी गई संख्या से A द्वारा फेंकी गई गई संख्या के अधिक होने की प्रायिकता है–

A and B throw a dice. The probability that A's throw is greater than B's throw in numbers is

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{5}{6}$

(C) $\frac{5}{12}$ (D) $\frac{7}{12}$

26. (C) A तथा B द्वारा फेंके गये पाँसे

$$S = \begin{Bmatrix} (1,1),(1,2).......(1,6) \\ (2,1),(2,2).......(2,6) \\ (3,1),(3,2),(3,3).......(3,6) \\ (4,1),(4,2),(4,3).......(4,6) \\ (5,1)....... \quad (5,6) \\ (6,1),(6,2)....... \quad (6,6) \end{Bmatrix}$$

EA द्वारा अधिक अंक पाने पर,

$$E = \begin{Bmatrix} (2,1),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2), \\ (4,3),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4), \\ (6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5) \end{Bmatrix}$$

प्रायिकता $P = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$

27. वक्र $x^2y^2 = a^2(x^2 + y^2)$ की अनंत स्पर्शियाँ हैं–

Asymptotes of the curve $x^2y^2 = a^2(x^2 + y^2)$ are

(A) $x = 0, y = 0$

(B) $x = \pm a, y = 0$

(C) $x = 0, y = \pm a$

(D) $x = \pm a, y = \pm a$

27. (D) दिया है, $x^2y^2 = a^2(x^2 + y^2)$

अनंत स्पर्शियों के लिये

$$x^2y^2 - a^2x^2 = a^2y^2$$

$$x^2(y^2 - a^2) = a^2y^2$$

$$y^2 - a^2 = 0$$

$$y = \pm a$$

पुनः $x^2y^2 - a^2y^2 = a^2x^2$

$$y^2(x^2 - a^2) = a^2x^2$$

$$x^2 - a^2 = 0$$

$$x = \pm a$$

समी. $x = \pm a$

$y = \pm a$

28. सामान्य रज्जुवक्र का कार्तीय (कार्टेशियन) समीकरण है–

The Cartesian equation of the common catenary is

(A) $y^2 = c^2 + x^2$

(B) $y = c\cosh\left(\frac{x}{c}\right)$

(C) $y = c \sec x$

(D) $y = c \tan hx$

28. (B) सामान्य रज्जुवक्र का कार्तीय समी.

$= y = c\cosh\left(\frac{x}{c}\right)$ होता है।

29. 1, 2, 3, 4, 5 से पाँच अंकों की संख्या बिना दोबारा आये इस प्रकार बनाई जाती है कि बनी संख्या 4 से विभाजित हो, इस प्रकार से संख्या बनने की प्रायिकता है–

A five digit number is formed by the digits 1, 2, 3, 4, 5 without repetition, the probability that the number formed is divisible by 4, is

(A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{2}{5}$

(C) $\frac{3}{5}$ (D) $\frac{1}{5}$

29. (D) 1, 2, 3, 4, 5 से बनने वाली कुल संख्या

5	4	3	2	1

$= 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

1, 2, 3, 4, 5 से बनने वाली संख्याऐं जोकि 4 से विभाजित हैं

3	2	1	1	2

$= 3 \times 2 \times 1 \times 1 \times 1$

			2	4

$= 3 \times 2 \times 1 \times 1 \times 1$

			3	2

$= 3 \times 2 \times 1 \times 1 \times 1$

			5	2

$= 3 \times 2 \times 1 \times 1 \times 1$

$= 4 \times 6 = 24$

प्रायिकता $= \frac{24}{120} = \frac{1}{5}$

30. यदि $\sin(\theta + i\phi) = \tan\alpha + i\sec\alpha$ तो $\cos 2\theta \cosh 2\phi$ का मान बराबर है–

If $\sin(\theta + i\phi) = \tan\alpha + i\sec\alpha$, then $\cos 2\theta \cosh 2\phi$ is equal to

(A) 3 (B) 2

(C) 6 (D) 4

30. (A) दिया है, यदि $\sin(\theta + i\phi) = \tan\alpha + i\sec\alpha$

$\sin\theta\cos h\phi + i\cos\theta\sin h\phi = \tan\alpha + i\sec\alpha$

वास्तविक तथा काल्पनिक भाग की तुलना करने पर

$\sin\theta\cosh\phi = \tan\alpha$

$\cos\theta\sinh\phi = \sec\alpha$

$\sec^2\alpha - \tan^2\alpha = 1$

$\cos^2\theta\sinh^2\phi - \sin^2\theta\cosh^2\phi = 1$

$$\left(\frac{\cos 2\theta+1}{2}\right)\left(\frac{\cosh 2\phi-1}{2}\right)-\left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right)\times\left(\frac{1+\cosh 2\phi}{2}\right)$$

हम जानते हैं, $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$

$$\cos 2\theta = \frac{1-2\sin^2\theta}{2}$$

$= -2 + 2\cos 2\theta\cosh 2\phi = 4$

$\cos 2\theta\cosh 2\phi = 3$

31. यदि $f(x) = ax + b$ और $f(f(f(x))) = 8x + 21$ और यदि a, b वास्तविक संख्याएँ हों, तो $a + b$ बराबर है—

If $f(x)$ $f(x) = ax + b$ and $f(f(f(x))) = 8x + 21$ and if a, b are real numbers, then $a + b$ is equal to

(A) 2 (B) 3

(C) 5 (D) 7

31. (C) दिया है, $f(x) = ax + b$

और $f(f(f(x))) = 8x + 21$

तब $a + b = ?$

$f(f(x)) = a(ax + b) + b$

$= a^2x + ab + b$

$f(f(f(x))) = a(a^2x + ab + b) + b$

$= a^3x + a^2b + ab + b$

दिया है,

$f(f(f(x))) = 8x + 21$

$a^3x + a^2b + ab + b = 8x + 21$

तुलना करने पर,

$a^3 = 8$

तथा $a^2b + ab + b = 21$

$a = 2$

$4b + 2b + b = 21$

$7b = 21$

$b = 3$

अतः $a + b = 2 + 3 = 5$

32. यदि सदिश

$\vec{F} = (x+3y)\hat{i} + (y-2z)\hat{j} + (x-az)\hat{k}$

परिनालकीय है, तो a का मान है—

If the vector

$\vec{F} = (x+3y)\hat{i} + (y-2z)\hat{j} + (x-az)\hat{k}$

is solenoidal, then a is equal to

(A) 1 (B) –1

(C) 2 (D) –2

32. (C) दिया है,

$\vec{F} = (x+3y)\hat{i} + (y-2z)\hat{j} + (x-az)\hat{k}$

परिनालकीय है।

तब $\nabla.\vec{F} = 0$

अतः $\left(\hat{i}\frac{d}{dx} + \hat{j}\frac{d}{dy} + \hat{k}\frac{d}{d2}\right)\cdot$

$\left[(x+3y)\hat{i} + (y-2z)\hat{j} + (x-az)\hat{k}\right]$

$= 0$

$\frac{d}{dx}(x+3y) + \frac{d}{dy}(y-2z) + \frac{d}{dz}(x-az)$

$= 0$

$1 + 1 - a = 0$

$a = 2$

33. गोले $x^2 + y^2 + z^2 + x + y + z = 4$ की त्रिज्या है—

The radius of sphere $x^2 + y^2 + z^2 + x + y + z = 4$ is

(A) 3 (B) 4

(C) $\frac{\sqrt{19}}{4}$ (D) $\frac{\sqrt{19}}{2}$

33. (D) दिया है, गोले की समी. $x^2 + y^2 + z^2 + x + y + 2 = 4$

समी. की तुलना $x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$ में करने पर,

$2u = 1, u = \frac{1}{2}$ $2v = 1, v = \frac{1}{2}$

$2w = 1, w = \frac{1}{2}, d = -4$

त्रिज्या $= \sqrt{u^2 + v^2 + w^2 - d}$

$= \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 4} = \sqrt{\frac{3}{4} + 4}$

$= \frac{\sqrt{19}}{2}$

34. मूल बिन्दु से जाने वाले तथा निर्देशांक अक्षों पर 1, 3, 5 के अन्तःखण्ड काटने वाले गोले का समीकरण है—

The equation of the sphere passing through the origin and making intercepts 1, 3, 5 with the three coordinate axes is

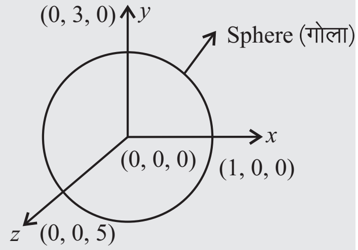
(A) $x^2 + y^2 + z^2 + x + 3y + 5z = 0$

(B) $x^2 + y^2 + z^2 - x + 3y - 5z = 0$

(C) $x^2 + y^2 + z^2 + x - 3y + 5z = 0$

(D) $x^2 + y^2 + z^2 - x - 3y - 5z = 0$

34. (D)



हम जानते हैं,

गोले का व्यापक समी. $x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$ ...(1)

गोला (0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 3, 0), (0, 0, 5) से होकर जाता है।

अतः $d = 0$ ...(1)

$1 + 2u = 0$ ...(2)

$\Rightarrow u = \frac{-1}{2}$

$9 + 2v \times 3 = 0$

$2v + 3 = 0$ ...(3)

$v = \frac{-3}{2}$

$25 + 2w \times 5 = 0$

$w = \frac{-5}{2}$

समी. 1 में $x^2 + y^2 + z^2 + 2 \times \left(\frac{-1}{2}\right)x + 2\times\left(\frac{-3}{2}\right)\times y + 2\times\left(\frac{-5}{2}\right)z + 0 = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - x - 3y - 5z = 0$

35. यदि एक 3 × 3 आव्यूह A के प्रत्येक अवयव को 3 से गुणा किया गया है, तो गई बनी आव्यूह की सारणिक है—

If each element of a 3 × 3 matrix A is multiplied by 3, then the determinant of the newly formed matrix is

(A) 3 |A| (B) 9 |A|

(C) $(|A|)^3$ (D) 27 |A|

35. (D) दिया है, $[A]_{3\times 3}$

$A = |A|$

$3A = 3^3|A|$

$= 27|A|$

36. आंशिक अवकल समीकरण $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = x + y$ का व्यापक हल है $z =$

The general solution of the partial differential equation $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = x + y$ is of the form $z =$

(A) $\frac{1}{2}xy(x-y) + F(x) + G(y)$

(B) $\frac{1}{2}xy(x+y) + F(x) + G(y)$

(C) $\frac{1}{2}xy(x-y) + F(x)G(y)$

(D) $\frac{1}{2}xy(x+y) + F(x)G(y)$

36. (D) दिया है, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = x + y$

y के सापेक्ष समाकलन करने पर,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = xy + \frac{y^2}{2} + G(y)$$

पुनः x के सापेक्ष समाकलन करने पर,

$$z = \frac{x^2}{z}y + \frac{y^2}{2}x + G(y) + F(x)$$

$$= \frac{1}{2}xy(x+y) + G(y)F(x)$$

37. मान लीजिए G, एक कोटि 6 का चक्रीय समूह है। तो $g \in G$ के अवयवों की संख्या, जिसके कि G = <g> है, है–

Let G be a cyclic group of order 6. Then, the number of elements $g \in G$, such that G = <g> is

(A) 2 (B) 3
(C) 4 (D) 5

37. (A) G = <g> generator group
G के अवयवों की संख्या 2 है।

38. मान लीजिए 'a' एक समूह का अवयव है और $O(a) = 30$, $O(a^{18})$ बराबर है–

Let 'a' be an element of a group and $O(a) = 30$, $O(a^{18})$ is equal to

(A) 2 (B) 5
(C) 6 (D) 10

38. (B) दिया है, $O(a) = 30$
$O(a^{18}) = ?$
$O(a) = 30 \Rightarrow a^{30} = e$
$a^{18} \times a^{18}$ ..... 5 बार $= a^{90} = e$
$\therefore$ $O(a^{18}) = 5$

39. यदि सदिश $x\hat{i} - 3\hat{j} + 7\hat{k}$ तथा $\hat{i} - y\hat{j} - z\hat{k}$ संरेखी हैं, तो $\frac{xy^2}{z}$ का मान है–

If the vectors $x\hat{i} - 3\hat{j} + 7\hat{k}$ and $\hat{i} - y\hat{j} - z\hat{k}$ are colinear, then the value of $\frac{xy^2}{z}$ is equal to

(A) $\frac{9}{7}$

(B) $\frac{6}{7}$

(C) $\frac{-6}{7}$

(D) उपर्युक्त में से कोई नहीं/none of the above

39. (D) दिया है, सदिश $x\hat{i} - 3\hat{j} + 7\hat{k}$ तथा $\hat{i} - y\hat{j} - z\hat{k}$ संपाती है।

तब $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ के गुणांक समानुपाती होंगे।

$x\hat{i} - 3\hat{j} + 7\hat{k}$, $\hat{i} - y\hat{i} - z\hat{k}$

$$\frac{x}{1} = \frac{-3}{-y} = \frac{7}{-z}$$

$$xy = 3,\ \frac{y}{z} = \frac{-3}{7}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{xy^2}{z} = \frac{-9}{7}$$

40. यदि सम्मिश्र संख्यायें $a_1, a_2, a_3, ...$ गुणोत्तर श्रेणी में हैं तथा सार्वनुपात r इस प्रकार है कि $\sum_{k=1}^{n} a_{2k-1} = \sum_{k=1}^{n} a_{2k+2} \neq 0$, तो r के सम्भव मानों की संख्या है–

If complex numbers $a_1, a_2, a_3, ...$ are in G.P. having common ratio r such that $\sum_{k=1}^{n} a_{2k-1} = \sum_{k=1}^{n} a_{2k+2} \neq 0$, then number of possible values of r is

(A) 1 (B) 2
(C) 3 (D) 4

40. (C) दिया है, $\sum_{k=1}^{n} a_{2k-1} = \sum_{k=1}^{n} a_{2k+2}$

$a_1 + a_3 + a_5 + a_7 ..... = a_4 + a_6 + a_8 + ...$
$\Rightarrow a + ar^2 + ar^4 + ... = ar^3 + ar^5 + ar^7 + ...\ a(1 + r^2 + r^4 + ...)\ ar^3(1 + r^2 + r^4 + ...)$
$r^3 = 1$
अतः r के संभावित मान 3 होंगे।

41. $\sin^2(x + iy)$ का वास्तविक भाग है–

Real part of $\sin^2(x + iy)$ is

(A) $\frac{1}{2}[1 + \cos 2x \cosh 2y]$

(B) $\frac{1}{2}[1 - \cos 2x \cosh 2y]$

(C) $\frac{1}{2}[1 + \sin 2x \sinh 2y]$

(D) $\frac{1}{2}[1 - \cos 2x \cosh 2y]$

41. (B) दिया है, $\sin^2(x + iy) \Rightarrow [\sin(x + iy)]^2$
$\Rightarrow (\sin x \cos hy + i \sin hy \cos hx)^2$
$\Rightarrow \sin^2 x \cos h^2 y - \sin h^2 y \cos^2 x + i.2 \sin x \cos hy \sin hy \cos x$
वास्तविक भाग $= \sin^2 x \cos h^2 y - \sin h^2 y \cos^2 x$
हल करने पर, $\frac{1}{2}[1 - \cos 2x \cosh 2y]$

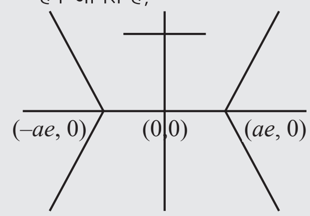
42. अतिपरवलय के फोकस के बीच की दूरी 16 है तथा इसकी उत्केन्द्रता $\sqrt{2}$ है। अतिपरवलय का समीकरण है–

The distance between the foci of a hyperbola is 16 and its eccentricity is $\sqrt{2}$ the equation of hyperbola is

(A) $x^2 - y^2 = 32$ (B) $2x^2 - y^2 = 16$
(C) $x^2 - 2y^2 = 32$ (D) $x^2 - y^2 = 8$

42. (A) दिया है, $2ae = 16$
$e = \sqrt{2}$
अतः $2a \times \sqrt{2} = 16$
$a = \frac{8}{\sqrt{2}}$
$a^2 = \frac{64}{2} = 32$

हम जानते है,



$$e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$$

$$e^2 = 1 + \frac{b^2}{a^2}$$

$$\Rightarrow \quad 2 = 1 + \frac{b^2}{32}$$

$$b^2 = 32$$

अतः अतिपरवलय का समी.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x^2}{32} - \frac{y^2}{32} = 1$$

$$\Rightarrow \quad x^2 - y^2 = 32$$

43. $5^2 + 6^2 + 7^2 + ... + 20^2$ का मान है–

The value of $5^2 + 6^2 + 7^2 + ... + 20^2$ is

(A) 2040 (B) 2540
(C) 2840 (D) 3840

43. (C) दिया है, $5^2 + 6^2 + 7^2 + ... 20^2$
हम जानते हैं, $1^2 + 2^2 + 3^2 + -$
$n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
अतः $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 20^2 - (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2)$

$$\therefore \frac{20(20+1)(20 \times 2 + 1)}{6} - (1 + 4 + 9 + 16)$$

$$\frac{20 \times 21 \times 41}{6} - 30$$

$10 \times 7 \times 41 - 30 = 2840$

44. यदि V एक n-विमीय सदिश समष्टि है तथा V पर T एक रैखिक रूपान्तरण इस प्रकार है कि T की कोटि तथा शून्यता बराबर है, तो

If V is a n-dimensional vector space and T is a linear transformation on V such that rank and nullity of T are identical then

(A) n सम है/n is even
(B) n विषम है/n is odd

(C) कभी सम तो कभी विषम/some times even some times odd

(D) उपर्युक्त में से कोई नहीं/none of the above

44. (A) दिया है, $n = \dim[R(T)] + \dim[W(T)]$

$n = x + x$

$n = 2x$

n एक सम है।

45. फलन $f(x) = \frac{1-\cos x}{x^2}, x \neq 0$ को $x = 0$ पर सतत् बनाया जा सकता है यदि $f(0)$ को परिभाषित करें, $f(0) =$

The function $f(x) = \frac{1-\cos x}{x^2}, x \neq 0$ can be made continuous at $x = 0$ by defining $f(0)$ to be equal to

(A) 1 (B) $\frac{1}{2}$

(C) 0 (D) 2

45. (B) दिया है, $f(x) = \frac{1-\cos x}{x^2}$

सतत होने के लिये

$$f(0) = \lim_{x\to 0^+}$$

$$f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x)$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$$

L-hospital के नियम से,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x} \Rightarrow \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{2}$$

46. यदि $f(a-x) = f(x)$, तो $\int_0^a x f(x)dx$ का मान है–

If $f(a-x) = f(x)$ then $\int_0^a x f(x)dx$ is equal to

(A) $\frac{a}{2}\int_0^a f(x)dx$ (B) $a\int_0^a f(x)dx$

(C) 0 (D) $2\int_0^a f(x)dx$

46. (A) दिया है, यदि $f(a-x) = f(x)$

तब $\int_0^a x f(x)dx$

$$I = \int_0^a x f(x)dx \quad ...(1)$$

$$I = \int_0^a (a-x) f(a-x)dx$$

$$I = \int_0^a (a-x) f(x)dx \text{ दिया है}$$

$$I = \int_0^a af(x)dx - \int_0^a xf(x)dx$$

$$I = \int_0^a af(x)dx - I \text{ [समी. 1 में]}$$

$$2I = a\int_0^a f(x)dx$$

$$I = \frac{a}{2}\int_0^a f(x)dx$$

47. यदि $f(x) = \frac{ae^{bx} + be^{ax}}{a+b}$, तो $f''(0)$ बराबर है।

If $f(x) = \frac{ae^{bx} + be^{ax}}{a+b}$, then $f''(0)$ equals

(A) 0 (B) ab

(C) $a + b$ (D) $ab(a + b)$

47. (B) दिया है, $f(x) = \frac{ae^{bx} + be^{ax}}{a+b}$

$$f'(x) = \frac{abe^{bx} + abe^{ax}}{a+b}$$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$f''(x) = \frac{ab^2e^{bx} + a^2be^{ax}}{a+b}$$

पुनः x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$f''(0) = \frac{ab^2e^0 + a^2be^0}{a+b}$$

$$= \frac{ab^2 + a^2b}{a+b}$$

$$= \frac{ab(a+b)}{a+b}$$

$$= ab$$

48. यदि $\vec{A}$ और $\vec{B}$ सदिश इस प्रकार हैं कि $|\vec{A}| = |\vec{B}| = 5$ और $\vec{A}\times\vec{B} = 4\hat{i} - 3\hat{k}$, तो $\vec{A}.\vec{B}$ बराबर है।

If $\vec{A}$ and $\vec{B}$ are vectors such that $|\vec{A}| = |\vec{B}| = 5$ and $\vec{A}\times\vec{B} = 4\hat{i} - 3\hat{k}$, then $\vec{A}.\vec{B}$ is equal to

(A) $5\sqrt{6}$ (B) $5\sqrt{2}$

(C) $10\sqrt{2}$ (D) $10\sqrt{6}$

48. (D) $|\vec{A}| = |\vec{B}|$ दिया है।

$$|\vec{A}\times\vec{B}| = |\vec{A}||\vec{B}|\sin\theta$$

$$|\vec{A}\times\vec{B}| = 25\sin\theta$$

$$\sqrt{(4)^2 + (3)^2} = 25\sin\theta$$

वर्ग करने पर,

$$25 = (25)^2\sin^2\theta \quad ...(1)$$

$$|\vec{A}.\vec{B}| = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta$$

$$|\vec{A}.\vec{B}| = 25\cos\theta$$

$$|\vec{A}.\vec{B}|^2 = (25)^2\cos^2\theta \quad ...(2)$$

समी. 1 व 2 से,

$$25 + |\vec{A}.\vec{B}|^2 = (25)^2[\sin^2\theta + \cos^2\theta]$$

$$|\vec{A}.\vec{B}|^2 = 625 - 25 = 600$$

$$|\vec{A}.\vec{B}| = 10\sqrt{6}$$

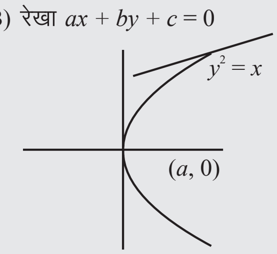
49. यदि रेखा $ax + by + c = 0$ परवलय $y^2 = x$ को स्पर्श करती है, तो निम्नलिखित में कौन सही है?

If the line $ax + by + c = 0$ touches the parabola $y^2 = x$, then which of the following is correct?

(A) $abc = 1$ (B) $b^2 = 4ac$

(C) $a^2 = 4bc$ (D) $c^2 = 4ab$

49. (B) रेखा $ax + by + c = 0$



यदि रेखा परवलय को स्पर्श करती है।

$y^2 = x$ की तुलना $y^2 = 4ax$ तब $c = \frac{a}{m}$ से करने पर

$$4a = 1$$

$$a = \frac{1}{4}$$

$$y = \frac{-a}{b}x - \frac{c}{b}$$

$$y = mx + c$$

$$\Rightarrow \quad c = \frac{-c}{b}, m = -\frac{a}{b}$$

$$\frac{-c}{b} = \frac{1}{4}\left(-\frac{b}{a}\right)$$

$$b^2 = 4ac$$

50. आंशिक अवकल समीकरण $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ का हल का रूप है $u =$

The solution of PDE $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ is of the form $u =$

(A) $f(x + y)$ (B) $f(x - y)$

(C) $f\left(\frac{y}{x}\right)$ (D) $f(xy)$

50. (C) दिया है, $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 0$

Euler's theorem के प्रयोग से,

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y} = hu$$

तुलना करने पर, $h = 0$

degree = 0

अतः $u = f\left(\frac{y}{x}\right)$

51. G एक समूह है जिसका क्रम 30 है तथा A, B क्रमशः क्रम 2 तथा 5 के नार्मल उपसमूह हैं, तो $O\left(\frac{G}{AB}\right)$ है।

Let G be a group of order 30 and let A, B be normal subgroups of orders 2 and 5 respectively. Then $O\left(\frac{G}{AB}\right)$ is

(A) 2 (B) 3

(C) 5 (D) 10

51. (B) $O(G) = 30$

$O(A) = 2$

$O(B) = 5$

$$O\left(\frac{G}{AB}\right) = \frac{O(G)}{O(AB)} = \frac{30}{O(A)(OB)} = \frac{30}{2\times 5} = 3$$

52. यदि α और β समीकरण $x^2+x+1=0$ के मूल है, तो समीकरण जिसके मूल α^7 एवं β^4 हो, है

If α and β are roots of the equation $x^2 + x + 1 = 0$, then the equation whose roots are α^7 and β^4 is

(A) $x^2 - x - 1 = 0$ (B) $x^2 - x + 1 = 0$

(C) $x^2 + x - 1 = 0$ (D) $x^2 + x + 1 = 0$

52. (D) दिया है, समी. $x^2 + x + 1 = 0$ के मूल α, β हैं।

अतः $\alpha + \beta = -1, \alpha\beta = 1$

समी. जिसके मूल α^7, β^4 हो

$$x^2 - (\alpha^7 + \beta^4)x + \alpha^7\beta^4 = 0 \quad ...(1)$$

$$(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = 1 - 4 = -3$$

$$\alpha - \beta = \pm\sqrt{3}$$

अतः मूल काल्पनिक होंगे।

$\therefore \quad \alpha = w, \beta = w^2$

$[1 + w + w^2 = 0, w^3 = 1]$

समी. 1 में,

$$x^2 - [w^7 + (w^2)^4]x + w^7(w^2)^4 = 0$$

$$x^2 - (w^7 + w^8)x + w^7w^8 = 0$$

$$x^2 - [(w^3)^2w + (w^3)^2 w^2]x + (w^3)^5 = 0$$

$$x^2 - (w + w^2)x + 1 = 0$$

$$x^2 - (-1)x + 1 = 0$$

$$x^2 + x + 1 = 0$$

53. श्रेणी

$$\frac{1}{\lfloor 2} + \frac{1+2}{\lfloor 3} + \frac{1+2+3}{\lfloor 4} + \frac{1+2+3+4}{\lfloor 5} + ...$$

का योग है।

Sum of the series

$$\frac{1}{\lfloor 2} + \frac{1+2}{\lfloor 3} + \frac{1+2+3}{\lfloor 4} + \frac{1+2+3+4}{\lfloor 5} + ...$$

is equal to

(A) $2e$ (B) e

(C) $e - 1$ (D) $\frac{e}{2}$

53. (D) दिया है,

$$\frac{1}{\lfloor 2} + \frac{1+2}{\lfloor 3} + \frac{1+2+3}{\lfloor 4} + \frac{1+2+3+4}{\lfloor 5} + ...$$

$$T_n = \frac{\Sigma n}{\lfloor n+1} = \frac{n(n+1)}{2\lfloor n+1}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2(n+1)\lfloor n} = \frac{1}{2\lfloor n-1}$$

$$S_n = T_1 + T_2 + T_3 + ... T_n$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ...\right]$$

$$S_n = \frac{1}{2}e$$

54. $\iint_s \vec{F}.\hat{n}ds$ का मान, जहाँ $\vec{F} = 4xz\hat{i} - y^2\hat{j} + yz\hat{k}$ तथा S एक घन की सतह है तो $x = 0, x = 1, y = 0, y = 1, z = 0, z = 1$ के परिबद्ध है, है

Value of $\iint_s \vec{F}.\hat{n}ds$, where $\vec{F} = 4xz\hat{i} - y^2\hat{j} + yz\hat{k}$ and S is the surface of the cube bounded by $x = 0, y = 1, z = 0, z = 1$ is

(A) 1 (B) $\frac{3}{2}$

(C) 3 (D) $\frac{3}{2}$

54. (B) दिया है, $\vec{F} = 4xz\hat{i} - y^2\hat{j} + yz\hat{k}$

तब $\iint_s \vec{F}.\hat{n}ds$ का मान

divergence theorem के प्रयोग से,

$$\iint_s \vec{F}.\hat{n}ds = \iiint_v (\vec{v}.\vec{F})dv$$

$$(\nabla.\vec{F}) = \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$\left(4xz\hat{i} - y^2\hat{j} + yz\hat{k}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}4xz + \frac{\partial}{\partial y}(-y^2) + \frac{\partial}{\partial z}yz$$

$$= 4z - 2y + y$$

अतः $\iiint_v (4z - y)dv$

$$\Rightarrow \int_0^1\int_0^1\int_0^1 (4z - y)dx\,dy\,dz$$

$$= \int_0^1\int_0^1 \left[\frac{4z^2}{2} - zy\right]_0^1 dx\,dy$$

$$= \int_0^1\int_0^1 (2\times 1 - y)dx\,dy$$

$$= \int_0^1\int_0^1 (2 - y)dx\,dy$$

$$= \int_0^1 \left(2y - \frac{y^2}{2}\right)_0^1 dx$$

$$= \int_0^1 \left(2 - \frac{1}{2}\right)dx$$

$$= \int_0^1 \frac{3}{2}dx$$

$$= \frac{3}{2}[x]_0^1 = \frac{3}{2}$$

55. यदि आव्यूह $\begin{bmatrix} k & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ की शून्यता 1 है, तो k का मान है

If the nullity of the matrix $\begin{bmatrix} k & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ is 1, then the value of k is

(A) 0 (B) 1

(C) 2 (D) –1

55. (D) दिया है, आव्यूह $\begin{bmatrix} k & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ की शून्यता 1 है।

आव्यूह की विमा = Rank + nullity

3 = Rank + 1

Rank = 2

Rank 2 के 'determinant = 0

$$k(\pm 4 + 2) - 1(4 + 2) + 2(1 + 1) = 0$$

$$-2k - 6 + 4 = 0$$

$$-2k - 2 = 0$$

$$-2k = 2$$

$$k = -1$$

56. धनात्मक पूर्णांक n का न्यूनतम मान, जिसके लिये $(1 + i)^n = (1 - i)^n$, हो, है

The smallest value of positive integer n, for which $(1 + i)^n = (1 - i)^n$, is

(A) 2 (B) 4

(C) 6 (D) 8

56. (B) दिया है, $(1 + i)^n = (1 - i)^n$

$$\frac{(1+i)^n}{(1-i)^n} = 1$$

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n = 1$$

$$\Rightarrow \left[\frac{(1+i)\times(1+i)}{(1-i)\times(1+i)}\right]^n = 1$$

$$\left[\frac{(1+i)^2}{2}\right]^n = 1$$

$$\left[\frac{1+i^2+2i}{2}\right]^n = 1$$

$$(i)^n = 1$$

n का न्यूनतम मान 4 होगा।

57. कार्डियायड $r = a(1 + \cos\theta)$ के अन्दर के उस भाग का क्षेत्रफल जो वृत्त $r = a$ के बाहर है, हैं

The area inside the cardioid $r = a(1 + \cos\theta)$ and outside the circle $r = a$ is

(A) $a^2(\pi + 2)$

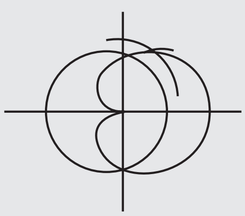
(B) $a^2\left(\frac{\pi}{4}+2\right)$

(C) $a^2(\pi - 2)$

(D) इसमें से कोई नहीं/none of these

57. (B) दिया है, $r = a(1 + \cos\theta)$

$r = a$



$$A = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{r_1}^{r_2} r\,dr\,d\theta$$

$$A = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{a}^{a(1+\cos\theta)} r\,dr\,d\theta$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{r^2}{2}\right]_a^{a(1+\cos\theta)} d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}[a^2(1+\cos\theta)^2 - a^2]d\theta$$

$$=\frac{a^2}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos^2\theta+1+2\cos\theta-1)d\theta$$

$$=\frac{a^2}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos^2\theta+2\cos\theta)d\theta$$

$$=\frac{a^2}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}+2\cos\theta\right)d\theta$$

$$=\frac{a^2}{2}\left[\frac{\theta}{2}+\frac{\sin 2\theta}{4}+2\sin\theta\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{a^2}{2}\left[\begin{array}{l}\frac{\pi}{2\times 2}+\frac{\sin\frac{2\times\pi}{2}}{4}+2\sin\frac{\pi}{2}\\ +\frac{\pi}{2\times 2}+\frac{\sin\frac{2\pi}{2}}{4}+2\sin\frac{\pi}{2}\end{array}\right]$$

$$=\frac{a^2}{2}\left[\frac{\pi}{2}+4\right]$$

$$A = a^2\left(\frac{\pi}{4}+2\right)$$

58. मान लीजिए $\hat{a}$ और $\hat{b}$ इकाई सदिश है और इनके बीच का कोण θ है। $\cos\frac{\theta}{2}$ का मान निम्नलिखित में कौन-सा होगा ?

Let $\hat{a}$ and $\hat{b}$ be two unit vectors and θ be the angle between them. Which of the following will be value of $\cos\frac{\theta}{2}$?

(A) $\frac{|\hat{a}+\hat{b}|}{4}$ (B) $\frac{|\hat{a}-\hat{b}|}{4}$

(C) $\frac{|\hat{a}+\hat{b}|}{2}$ (D) $\frac{|\hat{a}-\hat{b}|}{2}$

58. (C) दिया है, $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$

$$|\hat{a}+\hat{b}|^2 = (\hat{a}+\hat{b})^2$$

$$= \hat{a}^2+\hat{b}^2+2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2 = 2+2\cos\theta$$

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2 = 2\left(1+2\cos^2\frac{\theta}{2}-1\right)$$

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2 = 4\cos^2\frac{\theta}{2}$$

$$\frac{\cos\theta}{2} = \frac{|\vec{a}+\vec{b}|}{2}$$

59. यदि A और B दो समुच्चय इस प्रकार हैं कि $n(A) = 4$, $n(B) = 3$, तो $n(A\cap B)$ का महत्तम मान है–

If A and B are two sets such that $n(A) = 4$, $n(B) = 3$, then the maximum value of $n(A\cap B)$ is

(A) 0 (B) 1

(C) 4 (D) 3

59. (D) दिया है, $n(A) = 4$, $n(B) = 3$

$n(A\cap B) = ?$

हम जानते हैं,

$n(A\cup B) = n(A) + n(B) - n(A\cap B)$

तथा $n(A\cap B) = n(A) + n(B) - n(A\cup B)$

$= 4 + 3 - n(A\cup B)$

$= 7 - n(A\cup B)$

$n(A\cap B)_{max} = 7 - n(A\cup B)_{min}$

परन्तु $n(A\cup B)_{min} = 4$

$n(A\cap B)_{max} = 7 - 4 = 3$

60. $y = ae^{-bx}$ (a, b प्राचल है) का अवकल समीकरण है–

The differential equation of $y = ae^{-bx}$ (a and b are parameters) is

(A) $y\frac{dy}{dx} = \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2$

(B) $y\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$

(C) $y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{d^2y}{dx^2}$

(D) $y\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 = \frac{dy}{dx}$

60. (B) दिया है, $y = ae^{-bx}$ ...(1)

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = ae^{-bx}\times(-b) \quad ...(2)$$

$$\frac{dy}{dx} = -b(ae^{-bx})$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -by$$

पुनः x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -b\frac{dy}{dx}$$

समी. 1 को 2 से भाग देने पर,

$$\frac{y}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{-b} \Rightarrow b = \frac{-\frac{dy}{dx}}{y}$$

अतः

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{dy}{dx}}{y}\times\frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow y\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

61. $\begin{vmatrix}1&4&7\\2&5&8\\3&6&9\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}4&4&7\\5&5&8\\7&6&9\end{vmatrix}$ का मान

The sum of $\begin{vmatrix}1&4&7\\2&5&8\\3&6&9\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}4&4&7\\5&5&8\\7&6&9\end{vmatrix}$ will be

(A) शून्य होगा/ Zero

(B) $\begin{vmatrix}5&8&14\\7&10&16\\10&12&18\end{vmatrix}$ होगा

(C) $\begin{vmatrix} 5 & 4 & 7 \\ 7 & 5 & 8 \\ 10 & 6 & 9 \end{vmatrix}$ होगा

(D) $\begin{vmatrix} 1 & 8 & 14 \\ 2 & 10 & 16 \\ 3 & 12 & 18 \end{vmatrix}$ होगा

61. (C) दिया है, $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 4 & 7 \\ 5 & 5 & 8 \\ 7 & 6 & 9 \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1+4 & 4 & 7 \\ 2+5 & 5 & 8 \\ 3+7 & 6 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 7 \\ 7 & 5 & 8 \\ 10 & 6 & 9 \end{vmatrix}$$

62. $(1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + ...)^{-n}$ के विस्तार में x^n का गुणांक है–

The coefficient of x^n in the expansion of $(1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + ...)^{-n}$

(A) $(-1)^{n+1}n$

(B) $\frac{\lfloor 2n}{(\lfloor n)^2}$

(C) $\frac{\lfloor 2n}{\lfloor n+1 \lfloor n-1}$

(D) उपर्युक्त में से कोई नहीं/None of the above

62. (B) दिया है, $(1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + ...)^{-n}$

तब x^n का गुणांक होगा

दिया है, $1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + ...$
$= (1 + x)^{-2}$

अतः $[(1 + x)^{-2}]^n = (1 + x)^{2n}$

x^4 का गुणांक $T_{r+1} = {}^nC_r(x)^{n-r}a^r$
$= {}^{2n}C_n(x)^n(1)^r$

x^n का गुणांक $= {}^{2n}C_n = \frac{\lfloor 2n}{(\lfloor n)^2}$

63. $\left(\frac{x^3}{4} - \frac{2}{x^2}\right)^9$ के प्रसार में अंत से चौथा पद है–

In the expansion of $\left(\frac{x^3}{4} - \frac{2}{x^2}\right)^9$ the 4th term from the end is

(A) $\frac{48}{x^3}$ (B) $\frac{84}{x^3}$

(C) $\frac{64}{x^3}$ (D) $\frac{72}{x^3}$

63. (B) दिया है, $\left(\frac{x^3}{4} - \frac{2}{x^2}\right)^9$

प्रसार में अंत से चौथे पद के लिये अंत से चौथा पद $= (n - r + 1)^{th}$ पद प्रारम्भ से

$= (9 - 3 + 1)^{th} = 7^{th}$

$T_7 = T_{r+1} = {}^nC_r(x)^{n-r}(a)^r$

$$T_{6+1} = {}^9C_6\left(\frac{x^3}{4}\right)^{9-6}\left(\frac{-2}{x}\right)^6$$

$$T_7 = \frac{84}{x^3}$$

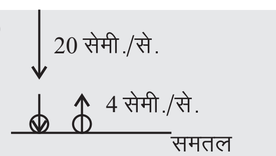
64. एक गोला एक समतल पर 20 सेमी. प्रति सेकण्ड के वेग से उर्ध्वाधर टकराकर 4 सेमी. प्रति सेकण्ड के वेग से वापस ऊपर जाता है, तो प्रत्यानयन गुणांक e का मान है–

A sphere after collision with a plane vertically downwards with velocity 20 cm per second returns upwards with velocity 4 cm/second, then the value of the coefficient of restitution e is

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{3}$

(C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{5}$

64. (D)



$v = 20$ सेमी/सेकण्ड

$ev = 4$ सेमी/सेकण्ड

$$\frac{ev}{v} = \frac{4}{20}$$

$$\Rightarrow \quad e = \frac{1}{5}$$

65. निम्नलिखित कथनों पर विचार कीजिए–

Consider the following statements

I. $\frac{d}{dx}\operatorname{sec}hx = \operatorname{sec}hx \tan hx$

II. $\frac{d}{dx}\sinh^{-1}x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

निम्नलिखित में कौन-सा/से सत्य है ?

Which of the following is/are true ?

(A) केवल I/Only I

(B) केवल II/Only II

(C) I और II दोनों/I and II both

(D) न तो I न ही II/neither I nor II

65. (B) हम जानते हैं,

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sec}hx = -\operatorname{sec}hx \tan x$$

$$\frac{d}{dx}\sinh^{-1}x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

66. सरल रेखाएँ $3x - 4y + 4 = 0$ और $6x - 8y + 13 = 0$ एक ही वृत्त की दो स्पर्शियाँ हैं। वृत्त की त्रिज्या है।

The straight lines $3x - 4y + 4 = 0$ and $6x - 8y + 13 = 0$ are tangents to the same circle. The radius of the circle is

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{4}$

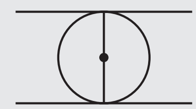
(C) $\frac{3}{2}$ (D) 2

66. (B) दिया है, सरल रेखाएँ $3x - 4y + 4 = 0$

तथा $6x - 8y + 13 = 0$

$\Rightarrow \quad 3x - 4y + \frac{13}{2} = 0$

वृत्त की 2 स्पर्शी है।



$3x - 4y + 4 = 0$

$3x - 4y + \frac{13}{2} = 0$

दो रेखाओं के बीच की दूरी $= d$

$$= \left|\frac{c_1 - c_2}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$$

$$= \left|\frac{4 - \frac{13}{2}}{\sqrt{16+a}}\right|, \left|\frac{8-13}{2\times 5}\right|, \left|\frac{-1}{2}\right|$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$d = 2r = \frac{1}{2}$$

$$r = \frac{1}{4}$$

67. केन्द्रीय शंकवज $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ के निर्देशक गोले का समीकरण है–

The equation of the director sphere of the central conicoid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ is

(A) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + b^2 + c^2$

(B) $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$

(C) $ax^2 + by^2 + cz^2 = a^2 + b^2 + c^2$

(D) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

67. (A) केन्द्रीय शंकवज $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ के

निर्देशक गोले का समी. $= x^2 + y^2 + z^2$
$= a^2 + b^2 + c^2$ होगा।

68. एक दौड़ में तीन धावकों P, Q, R के जीतने की प्रायिकताएँ क्रमशः $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ तथा $\frac{1}{5}$ हैं। इनमें से दौड़ में किसी भी धावक के न जीतने की प्रायिकता है–

The probabilities of winning a race by three racers P, Q, R are $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ and $\frac{1}{5}$ respectively. The probability of none of them wins in the race is

(A) $\frac{1}{5}$

(B) $\frac{13}{60}$

(C) $\frac{2}{5}$

(D) उपर्युक्त में से कोई नहीं/None of the above

68. (C) $P = P(\overline{A})\,P(\overline{B})\,P(\overline{C})$

$$= \left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)$$

$$= \frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{4}{5} = \frac{2}{5}$$

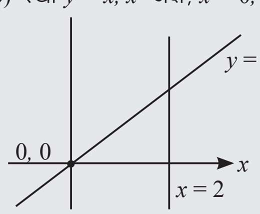
69. रेखा $y = x$, x-अक्ष तथा कोटियों $x = 0$, $x = 2$ के बीच के क्षेत्रफल को x-अक्ष के परितः घुमाया जाता है, तो इस प्रकार जनित ठोस का गुरुत्व केन्द्र निम्न बिन्दु पर है–

The area lying between line $y = x$, x-axis and ordinates $x = 0$ and $x = 2$ is revolved about x-axis. The centre of gravity of the solid thus generated is at the following point.

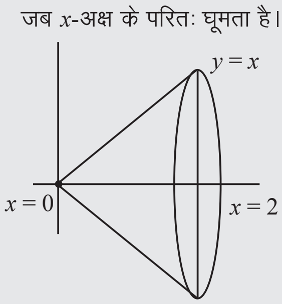
(A) $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ (B) $\frac{3}{2}, 0$

(C) $\frac{3}{4}, 0$ (D) $\frac{1}{4}, 0$

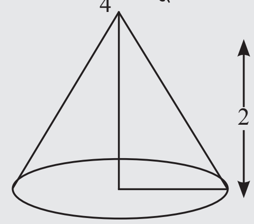
69. (B) रेखा $y = x$, x- अक्ष, $x = 0$, $x = 2$



जब x-अक्ष के परितः घूमता है। तब,



यह एक शंकु जैसी संरचना बन जायेगी। हम जानते हैं कि शंकु का गुरुत्वीय केन्द्र आधार से $\frac{h}{4}$ की दूरी पर होता है।



गुरुत्वीय केन्द्र $\left(\frac{2}{4}, 0\right)$ आधार से $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ है।

शीर्ष से गुरुत्वीय केन्द्र $= \frac{3h}{4}$

अतः $\left(3\times\frac{2}{4}, 0\right)$

शीर्ष से $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ है।

70. यदि समतल $x + 2y + 3z = p$, शंकवज $x^2 - 2y^2 + 3z^2 = 2$ को स्पर्श करता है, तो p का मान है–

If the plane $x + 2y + 3z = p$ touches the conicoid $x^2 - 2y^2 + 3z^2 = 2$, then the value of p is

(A) 0 (B) 1

(C) 4 (D) 2

70. (D) दिया है, समतल $x + 2y + 3z = p$ शंकवज $x^2 - 2y^2 + 3z^2 = 2$ को स्पर्श करता है।

तब $p^2 = \frac{l^2}{a} + \frac{m^2}{b} + \frac{n^2}{c}$

$l = 1, m = 2, n = 3$

शंकवज की तुलना $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ से करने पर,

$$\frac{x^2}{2} - \frac{2y^2}{2} + \frac{3z^2}{2} = 1$$

$$a = \frac{1}{2}, b = -1, c = \frac{3}{2}$$

$$p^2 = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)} + \frac{(2)^2}{(-1)} + \frac{(3)^2}{\frac{3}{2}}$$

$= 2 - 4 + 6 = 4$

$p = 2$

71. यदि a, b, c समान्तर श्रेढ़ी में हैं, तो $\begin{vmatrix} x+1 & x+2 & x+a \\ x+2 & x+3 & x+b \\ x+3 & x+4 & x+c \end{vmatrix}$ का मान है–

If a, b, c are in arithmetic progression, then the value of $\begin{vmatrix} x+1 & x+2 & x+a \\ x+2 & x+3 & x+b \\ x+3 & x+4 & x+c \end{vmatrix}$ is

(A) 0 (B) 1

(C) 2 (D) abc

71. (A) दिया है, a, b, c समान्तर श्रेढ़ी में है।

तब, $a + c = 2b$

$a + c - 2b = 0$

$$\begin{vmatrix} x+1 & x+2 & x+a \\ x+2 & x+3 & x+b \\ x+3 & x+4 & x+c \end{vmatrix}$$

$R_1 \to R_1 + R_3 - 2R_2$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & a+c-2b \\ x+2 & x+3 & x+b \\ x+3 & x+4 & x+c \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x+2 & x+3 & x+b \\ x+3 & x+4 & x+c \end{vmatrix} = 0$$

72. यदि X = {1, 2, 3, 4} तो X पर परिभाषित सम्बन्ध R = {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (3, 2), (2, 3), (2, 1), (1, 2)} X पर परिभाषित है–

If X = {1, 2, 3, 4} then the relation R = {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (3, 2), (2, 3), (2, 1), (1, 2)} defined on X is

(A) स्वतुल्य, सममित तथा संक्रामक/reflexive, symmetric and transitive

(B) स्वतुल्य, सममित परन्तु संक्रामक नहीं/reflexive, symmetric but not transitive

(C) सममित, संक्रामक परन्तु स्वतुल्य नहीं/symmetric, transitive but not reflexive

(D) स्वतुल्य, संक्रामक परन्तु सममित नहीं/reflexive, transitive but not symmetric

72. (B) दिया है, X = {1, 2, 3, 4}

$$R = \begin{Bmatrix} (1,1),(2,2),(3,3),(4,4), \\ (3,2),(2,3),(2,1),(1,2) \end{Bmatrix}$$

स्वतुल्य के लिये aRa {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)}

सममित के लिये aR$b \Leftrightarrow b$Ra परिभाषित है।

संक्रामक के लिये aRb.bR$c \Rightarrow c$Ra

अतः परिभाषित नहीं है।

73. अवकल समीकरण $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 7\frac{dy}{dx} + 12 = 0$ का हल है–

The solution of differential equation $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 7\frac{dy}{dx} + 12 = 0$ is

(A) $(y - 4x + c)(y - 3x + c) = 0$

(B) $(y + x + c)(y - x + c) = 0$

(C) $(y + 4x + c)(y + 3x + c) = 0$
(D) $(y + 2x + c)(y + 3x + c) = 0$

73. (A) दिया है, $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 7\frac{dy}{dx} + 12 = 0$

माना $D = \frac{dy}{dx}$

$\Rightarrow D^2 - 7D + 12 = 0$
$(D - 4)(D - 3) = 0$
$D = 4, 3$
$\frac{dy}{dx} = 3, \frac{dy}{dx} = 4$
$dy = 3dx, dy = 4dx$
समाकलन करने पर,
$y = 3x + c, y = 4x + c$
$(y - 3x + c), (y - 4x + c)$
अभीष्ट हल
$(y - 3x + c)(y - 4x + c) = 0$

74. (1, 1) से जाने वाली वक्र, जो अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = x^2$ को संतुष्ट करती है, का समीकरण है–
Equation of the curve passing through (1, 1) and satisfying the differential equation $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = x^2$ is
(A) $xy = x^4 + 3$ (B) $4xy + x^4 = 3$
(C) $ye^x = x^4 + 3$ (D) $4xy = x^4 + 3$

74. (D) $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = x^2$

$\frac{dy}{dx} + py = Q$ से तुलना करने पर,

$p = \frac{1}{x}, Q = x^2$

अतः I.F. $= e^{\int p dx}$

$\Rightarrow e^{\int \frac{1}{x} dx} \rightarrow e^{\log x} = x$

$y \times \text{I.F.} = \int \text{Q.I.F.}\, dx + c$

$y \times x = \int x^2 \times x dx + c$

$y \times x = \int x^3 dx + c$

$\Rightarrow y \times x = \frac{x^4}{4} + c$

समी. (1, 1) संतुष्ट करती है।

$1 = \frac{1}{4} + c$

$\Rightarrow c = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

अतः $y \times x = \frac{x^4}{4} + \frac{3}{4}$

$\Rightarrow 4xy = x^4 + 3$

75. (Z, +) समूह में, 2 तथा 7 से जनित उपसमूह है–
In the group (Z, +), the subgroup generated by 2 and 7 is
(A) 9Z (B) 14Z
(C) Z (D) 5Z

75. (C) 2, 7 → H.C.F = 1
अतः उपसमूह $1 \times Z = Z$

76. यदि सदिश $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ अघूर्णनीय हैं, तो div $(\vec{a} \times \vec{b})$ बराबर है–
If $\vec{a}$ and $\vec{b}$ are irrotational vectors, then div$(\vec{a} \times \vec{b})$ is equal to
(A) 1 (B) 2
(C) 3 (D) 0

76. (D) दिया है, $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ अघूर्णनीय हैं
अतः $\nabla \times \vec{a} = 0, \nabla \times \vec{b} = 0$
अतः div$(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b}.(\nabla \times \vec{a})$
$-\vec{a} \times (\nabla \times \vec{b}) = 0$

77. रेखाओं की दिक् कोज्यायें समीकरण $l + m + n = 0$ तथा $2lm + 2nl - mn = 0$ को सन्तुष्ट करती हैं। रेखाओं के बीच का कोण है–
Tha angle between the lines whose direction cosines satisfy the equations $l + m + n = 0$ and $2lm + 2nl - mn = 0$ is
(A) 45°
(B) 90°
(C) 120°
(D) उपर्युक्त में से कोई नहीं/none of the above

77. (C) दिया है, रेखाओं की दिक् कोज्यायें समी. $l + m + n = 0$ तथा $2lm + 2nl - mn = 0$ को सन्तुष्ट करती है।
$l + m + n = 0$
$\Rightarrow m + n = -l$
$2lm + 2nl - mn = 0$
$2l(m + n) - mn = 0$
अतः $-2(m + n)^2 - mn = 0$
हल करने पर, $-2m^2 - 2n^2 - 4mn - mn = 0$
$-2m^2 - 2n^2 - 5mn = 0$
$2m^2 + 2n^2 + 5mn = 0$
$\Rightarrow 2m^2 + 5mn + 2n^2 = 0$
$2m^2 + 4mn + mn + 2n^2 = 0$
$\Rightarrow 2m(m + 2n) + n(2n + m)$
$(2m + n)(m + 2n)$
$\Rightarrow m = \frac{-n}{2}$ तथा $m = -2n$

जब $m = \frac{-n}{2}$ लेने पर
$l = m$

$\therefore \frac{l}{1} = \frac{m}{1} = \frac{-n}{2}$
$a_1 = 1, b_1 = 1, c_1 = -2$
जब $m = -2n$
$l = n$
$\frac{l}{1} = \frac{n}{1} = \frac{m}{-2}$
$a_2 = 1, b_2 = -2, c_2 = +1$

$\cos\theta = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \times \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$

$\cos\theta = \frac{1\times1 + 1\times -2 + (+1)\times(-2)}{\sqrt{1+1+4} \times \sqrt{1+1+4}}$

$\Rightarrow \frac{1-2-2}{6} = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}$

$\cos\theta = -\frac{1}{2}$

$\theta = 120°$

78. यदि समीकरण $x^2 + px + 12 = 0$ के मूलों का अन्तर एक हो, तो p के मान हैं–
If the difference of the roots of the equation $x^2 + px + 12 = 0$ is one, then the values of p are
(A) ±7 (B) ±2
(C) ±3 (D) ±1

78. (A) दिया है, समी. $x^2 + px + 12 = 0$ के मूलों का अन्तर 1 है।
माना समी. के मूल α, β हैं।
$\Rightarrow \alpha + \beta = -p$ ...(1)
तब $\alpha\beta = 12$
$\alpha - \beta = 1$
अतः $(\alpha + \beta)^2 = (\alpha - \beta)^2 + 4\alpha\beta$
$p^2 = 1 + 48 = 49$
$p = \pm 7$

79. 3×3 के सभी वास्तविक सममित आव्यूहों से बने सदिश समष्टि की विमा है–
The dimension of the vector space of all 3×3 real symmetric matrices is
(A) 3 (B) 6
(C) $3n$ (D) 9

79. (B) 3×3 के सभी वास्तविक सममित आव्यूहों में बने सदिश समष्टि की विमा $= \frac{n(n+1)}{2}$

दिया है, $n = 3$

$\frac{3(3+1)}{2} = \frac{3\times4}{2}$

$= 6$

80. $4(\sin^2\theta + \cos^4\theta)$ के अधिकतम एवं न्यूनतम मानों का योग है–
Sum of maximum and minimum values of $4(\sin^2\theta + \cos^4\theta)$ is

(A) 3 (B) 4
(C) 5 (D) 7

80. (D) दिया है, $y = 4(\sin^2\theta + \cos^4\theta)$

$$\frac{dy}{d\theta} = 4(2\sin\theta\cos\theta - 4\cos^3\theta\sin\theta)$$

$$= 4 \times 2\sin\theta\cos\theta$$

$$1 - 2\cos^2\theta = -4\sin2\theta\cos2\theta$$

$$\frac{dy}{d\theta} = -2\sin4\theta \quad ...(1)$$

$\boxed{\therefore\ 2\sin\alpha\cos\alpha = \sin2\alpha}$

अधिकतम, न्यूनतम मान के लिये $\frac{dy}{d\theta} = 0$

$$-2\sin4\theta = 0,\ 4\theta = 0,\ \pi$$

समी. 1 का θ के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{d^2y}{d\theta^2} = -8\cos4\theta,$$

$$4\theta = 0,\ 4\theta = \pi$$

$$\theta = 0,\ \theta = \frac{\pi}{4}$$

जब $\theta = 0$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{d\theta^2} = -8\cos0 = -8 \text{ (अधिकतम)}$$

जब $\theta = \frac{\pi}{4}$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{d\theta^2} = -8\cos\pi = 8 \text{ (न्यूनतम)}$$

y_{max} (अधिकतम) $\big|_{\theta=0}$

$= 4(\sin0 + \cos0) = 4$

y_{min} (न्यूनतम) $\big|_{\theta=\frac{\pi}{4}}$

$$= 4\left[\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)^2 + \left(\cos\frac{\pi}{4}\right)^4\right]$$

$$= 4\times\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right] = 3$$

$$y_{max} + y_{min} = 4 + 3 = 7$$

81. सारणिक $\begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 \\ 3^2 & 4^2 & 5^2 & 6^2 \\ 4^2 & 5^2 & 6^2 & 7^2 \end{vmatrix}$ का मान है–

The value of the determinant $\begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 \\ 3^2 & 4^2 & 5^2 & 6^2 \\ 4^2 & 5^2 & 6^2 & 7^2 \end{vmatrix}$ is

(A) 60
(B) 96
(C) 120
(D) उपर्युक्त में से कोई नहीं/None of the above

81. (D) दिया है, $\begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 \\ 3^2 & 4^2 & 5^2 & 6^2 \\ 4^2 & 5^2 & 6^2 & 7^2 \end{vmatrix}$

$C_2 - C_1, C_3 - C_3, C_4 - C_3$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 4 & 5 & 7 & 9 \\ 9 & 7 & 9 & 11 \\ 11 & 9 & 11 & 13 \end{vmatrix}$$

$R_2 - R_1, R_3 - R_2, R_4 - R_3$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \\ 5 & 2 & 2 & 2 \\ 7 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$R_3 - R_2, R_4 - R_3$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 2\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + 0 = 0 + 0 = 0$$

82. यदि $\vec{r} = \frac{\vec{r}}{r}, r = |\vec{r}|$, तो div $\vec{r}$ बराबर है

If $\vec{r} = \frac{\vec{r}}{r}, r = |\vec{r}|$, then div $\vec{r}$ is equal to

(A) 0 (B) –1
(C) $\frac{1}{r}$ (D) $\frac{2}{r}$

82. (D) दिया है, $\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r}$, तब div $\vec{r}$ होगा।

माना, $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$|\vec{r}|^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad ...(1)$$

$$\text{div}\,\vec{r} = \nabla.\vec{r}$$

$$\Rightarrow \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$\left(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}\right)r$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\times\frac{x}{r} + \frac{\partial}{xy}\times\frac{y}{r} + \frac{\partial}{\partial z} + \frac{z}{r}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r} + x\frac{\partial}{\partial x}\times\frac{1}{r} + \frac{1}{r} + y\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{r} + \frac{1}{r} + z\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{r} + \frac{r}{-r^2}\times\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{y}{-r^2}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{2}{-r^2}\frac{\partial r}{\partial z}$$

समी. 1 में

$$2r\frac{\partial r}{\partial x} = 2x,\ 2r\frac{\partial r}{\partial y} = 2y$$

$$2r\frac{\partial r}{\partial z} = 2z$$

अतः $\frac{3}{r} + \frac{x}{-r^2}\times\frac{x}{r} + \frac{y}{-r^2}\times\frac{y}{r} + \frac{z}{-r^2}\times\frac{z}{r}$

$$= \frac{3}{r} - \frac{1}{r^3}[x^2 + y^2 + z^2]$$

$$= \frac{3}{r} - \frac{1}{r^3}\times r^2 \Rightarrow \frac{3}{r} - \frac{1}{r} = \frac{2}{r}$$

83. यदि N प्राकृत संख्याओं का समुच्चय है, तो प्रतिचित्रण $f: N \to N$, है जो कि परिभाषित है

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{यदि } x \text{ विषम है} \\ x-1 & \text{यदि } x \text{ सम है} \end{cases}, \text{ है}$$

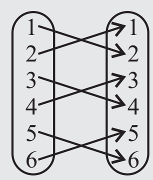
In N is the set of natural numbers, then the mapping $f: N \to N$ defined by

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{if } x \text{ is odd} \\ x-1 & \text{if } x \text{ is even} \end{cases} \text{ is}$$

(A) एकैकी एवं आच्छादक/one-one and onto
(B) बहुएक एवं आच्छादक/many to one and onto
(C) एकैकी एवं अनाच्छादक/one-one and into
(D) बहुएक एवं अनाच्छादक/many to one and into

83. (A) दिया है, $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{यदि } x \text{ विषम है} \\ x-1 & \text{यदि } x \text{ सम है} \end{cases}$

$f(1) = 2$
$f(2) = 1$
$f(3) = 4$
$f(4) = 3$
$f(5) = 6$
$f(6) = 5$



अतः एकैकी आच्छादक होगा।

84. अवकल समीकरण $\log_e\left(\frac{dy}{dx}\right) = 2x - y,\ y(0) = 0$ का हल है–

Solution of the differential equation $\log_e\left(\frac{dy}{dx}\right) = 2x - y,\ y(0) = 0$ to

(A) $e^y = 2e^{2x} + 1$ (B) $2e^y = e^{2x} + 1$
(C) $e^y = 2e^{2x} + 3$ (D) $2e^y = e^{2x} - 1$

84. (B) दिया है, $\log_e\left(\frac{dy}{dx}\right) = 2x - y$

$$y(0) = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = e^{2x-y}$$

$$= e^{2x}e^{-y}$$

$$\frac{dy}{e^{-y}} = e^{2x}dx$$

$$e^{ydy} = e^{2xdx}$$

समाकलन करने पर, $e^y = \frac{e^{2x}}{2} + c$

$$y(0) = 0$$

दिया है, $e^0 = \frac{1}{2}e^0 + c$

$$c = \frac{1}{2}$$

अत: $e^y = \frac{e^{2x}}{2} + \frac{1}{2}$

$$2e^y = e^{2x} + 1$$

85. यदि $x = \log(\sec\theta + \tan\theta)$, तो $\cos hx$ का मान है–

If $x = \log(\sec\theta + \tan\theta)$, then $\cos hx$ is equal to

(A) $\tan\theta$ (B) $\cos\theta$
(C) $\sin\theta$ (D) $\sec\theta$

85. (D) दिया है, $x = \log_e(\sec\theta + \tan\theta)$ तब $\cos hx$ होगी।

$$\cos hx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$e^x = e^{\log_e(\sec\theta + \tan\theta)}$$

$\Rightarrow \sec\theta + \tan\theta$

$$e^{-x} = \frac{1}{\sec\theta + \tan\theta}$$

$\Rightarrow \sec\theta - \tan\theta$

अत: $\cos hx = \frac{\sec\theta + \tan\theta + \sec\theta - \tan\theta}{2}$

$$= \frac{2\sec\theta}{2} = \sec\theta$$

86. निम्नलिखित फलनों $T : R^2 \to R^2$ में कौन-सा रैखिक रूपान्तरण है–

Which of the following functions $T : R^2 \to R^2$ is a linear transformation ?

(A) $T(x, y) = (x + 1, y)$
(B) $T(x, y) = (x, y + 1)$
(C) $T(x, y) = (x + y, 0)$
(D) $T(x, y) = (x - 1, y)$

86. (C) विकल्प के प्रयोग से

रैखिक रूपान्तरण के लिये प्रतिबिम्ब रैखिक होगा।

अत: $T(x, y) = (x + y, 0)$

87. वक्र $s = a\log\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\psi}{2}\right)$ की बिन्दु (s, ψ) पर वक्रता त्रिज्या है–

The radius of curvature of the curve $s = a\log\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\psi}{2}\right)$ at (s, ψ) is

(A) $a\tan\psi$ (B) $a\sec\psi$
(C) $a\sec^2\psi$ (D) $a\sec\psi\tan\psi$

87. (B) दिया है, वक्र $s = a\log\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\psi}{2}\right)$

वक्रता त्रिज्या $f = \frac{\partial s}{\partial\psi}$

s का ψ के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{\partial s}{\partial\psi} = a \times \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\psi}{2}\right)} \times \sec^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\psi}{2}\right) \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{a}{2} \times \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\psi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\psi}{2}\right)} \times \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\psi}{2}\right)}$$

$$= \frac{a}{2} \times \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\psi}{2}\right) \times \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\psi}{2}\right)}$$

$$= \frac{a}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \psi\right)} \Rightarrow \frac{a}{\cos\psi}$$

$= a\sec\psi$

88. यदि $f(2) = 4$ तथा $f'(2) = 1$, तो $\lim_{x\to 2} \frac{xf(2) - 2f(x)}{x - 2}$ बराबर है–

If $f(2) = 4$ and $f'(2) = 1$, then $\lim_{x\to 2} \frac{xf(2) - 2f(x)}{x - 2}$ is equal to

(A) 2 (B) 0
(C) 1 (D) 4

88. (A) दिया है, $f(2) = 4$ तथा $f'(2) = 1$

$$\lim_{x\to 2} \frac{xf(2) - 2f(x)}{x - 2}\left(\frac{0}{0}\right)$$

L-hospital के प्रयोग से,

$$\lim_{x\to 2} \frac{xf(2) - 2f'(x)}{1}$$

$$\Rightarrow \frac{4 - 2\times 1}{1} = 2$$

89. यदि A एक अव्युत्क्रमणीय आव्यूह हो, तो A. adj(A) है–

If A is a singular matrix, then A, adj(A) is

(A) एक तत्समक आव्यूह/an identity matrix
(B) एक शून्य आव्यूह/a null matrix
(C) एक अदिश आव्यूह/a scalar matrix
(D) उपर्युक्त में से कोई नहीं/none of the above

89. (B) दिया है, A एक अव्युत्क्रमणीय आव्यूह है।

तब A.adj(A) तब, $|A| = 0$

हम जानते हैं, $A.adj(A) = |A|I$

$\therefore |A| = 0$ तब $A.adj(A) = 0$

90. एक मात्रक सदिश, जो पृष्ठ $x^2 - xy + z^2 = 1$ के बिन्दु (1, 1, 1) पर अभिलंब हो, है

A unit vector, which is normal to the surface $x^2 - xy + z^2 = 1$ at the point (1, 1, 1) is

(A) $\frac{\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}}{\sqrt{6}}$ (B) $\frac{\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}}{\sqrt{6}}$

(C) $\frac{\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}}{\sqrt{6}}$ (D) $\frac{\hat{i} - \hat{j} - 2\hat{k}}{\sqrt{6}}$

90. (A) दिया है, पृष्ठ $x^2 - xy + z^2 = 1$

$f = x^2 - xy + z^2 = 1$

अभिलम्ब = gradient $f = \nabla f$

$$\Rightarrow \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$(x^2 - xy + z^2 - 1)$

$$i\frac{\partial}{\partial x}(x^2 - xy + z^2 - 1)$$

$$+\hat{j}\frac{\partial}{\partial y}(x^2 - xy + z^2 - 1)$$

$$+\hat{k}\frac{\partial}{\partial z}(x^2 - xy + z^2 - 1)$$

$\hat{i}(2x - y) + \hat{j}(-x) + \hat{k}(2)$

(1, 1, 1) पर, $\hat{i}(2-1) + \hat{j}(-1) + 2\hat{k}$

$\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$

मात्रक सदिश $= \frac{\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}}{\sqrt{1+1+4}}$

$$= \frac{\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}}{\sqrt{6}}$$

91. **कथन A :** प्रत्येक चक्रीय समूह का तुल्यकारी प्रतिबिम्ब भी चक्रीय समूह है।

कथन B : प्रत्येक चक्रीय समूह आबेली है। तब

Statement A : Every isomorphic image of a cyclic group is cyclic.

Statement B : Every cyclic group is abelian. Then

(A) दोनों A तथा B सत्य हैं/Both A and B are true
(B) दोनों A तथा B गलत हैं/Both A and B are false
(C) केवल A सत्य है/A is true only
(D) केवल B सत्य है/B is true only

91. (A) दिया है, **कथन A :** प्रत्येक चक्रीय समूह का तुल्यकारी प्रतिबिम्ब भी चक्रीय समूह है। कथन सत्य है।

कथन B : प्रत्येक चक्रीय समूह आबेली है। कथन सत्य है।

92. $\int_0^1 \frac{x^7}{1+x^{16}}dx$ का मान है—

The value of $\int_0^1 \frac{x^7}{1+x^{16}}dx$ is equal to

(A) $\frac{\pi}{4}$ (B) 0

(C) $\frac{\pi}{32}$ (D) 1

92. (C) $\int_0^1 \frac{x^7}{1+x^{16}}dx \Rightarrow \int_0^1 \frac{x^7}{1+(x^8)^2}dx$

माना, $x^8 = t$

$8x^7dx = dt$

$x^7dx = \frac{dt}{8}$

जब $x = 0, t = 0$

$x = 1, t = 1$

$8x^7dx = dt$

$x^7dx = \frac{dt}{8}$

$\Rightarrow \frac{1}{8}\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} \Rightarrow \frac{1}{8}\left|\tan^{-1} t\right|_0^1$

$\Rightarrow \frac{1}{8}(\tan^{-1}1 - \tan^{-1}0)$

$\Rightarrow \frac{1}{8}\times\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{32}$

93. यदि एक सामान्य रज्जुवक्र के किसी बिन्दु P पर अभिलम्ब नियता से बिन्दु Q पर मिलता है तथा P पर सामान्य रज्जुवक्र की वक्रता त्रिज्या ρ है, तो PQ बराबर है—

If normal at any point P of a common catenary meets the directrix at Q and ρ is the radius of curvature of the catenary at P, then PQ is equal to

(A) ρ (B) $c\cos\psi$

(C) $c\tan\psi$ (D) $c^2\sec\psi$

93. (A) यदि एक सामान्य रज्जुवक्र के किसी बिन्दु P पर अभिलम्ब नियता से बिन्दु R पर मिलता है तथा P पर सामान्य रज्जुवक्र की वक्रता त्रिज्या P है।

तब PQ = ρ होगा।

94. sin log (i^i) का मान है—

The value of sin log (i^i) is

(A) 0 (B) 1

(C) –1 (D) $\frac{1}{2}$

94. (C) दिया है, sin log$|i^i|$

$i^i = e^{-\frac{\pi}{2}}$ होता है।

अत: $\sin(\log e^{-\frac{\pi}{2}}) \Rightarrow \sin\left(\frac{-\pi}{2}\log_e e\right)$

$\sin\left(\frac{-\pi}{2}\right) \Rightarrow -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$

95. एक पत्थर 150 मीटर दूर स्थित एक 75 मीटर ऊँची दीवार को ठीक ऊपर से पार करते हुए क्षैतिज दिशा में जाता है, तो प्रक्षेप कोण है—

A stone just clears a wall of height 75 meters situated at a distance 150 meter and goes in horizontal direction, then the angle of projection is

(A) 30° (B) 60°

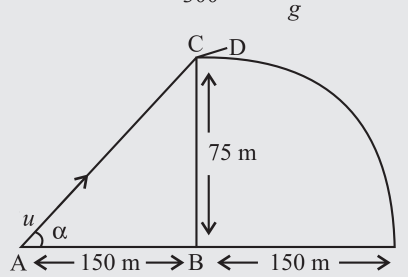
(C) 45° (D) 75°

95. (C) महत्तम ऊँचाई H = $\frac{u^2\sin^2\theta}{2g}$

$75 = \frac{u^2\sin^2\alpha}{2g}$

परास R = $\frac{u^2\sin 2\theta}{g}$

$300 = \frac{u^2\sin 2\alpha}{g}$



$\Rightarrow \frac{300}{75} = \frac{\frac{2u^2\sin\alpha\cos\alpha}{g\times u^2\sin^2\alpha}}{2g} \Rightarrow \frac{4}{\tan\alpha}$

$\tan\alpha = 1$

$\alpha = \frac{\pi}{4} = 45°$

96. फलन $f: R \to R, f(x) = \sin x; g: R \to R, g(x) = x^2$, से परिभाषित है, तो फलनों का संयोजन fog(x) है—

The composite mapping fog(x) of the maps $f: R \to R, f(x) = \sin x; g: R \to R, g(x) = x^2$, is

(A) $\sin x + x^2$ (B) $(\sin x)^2$

(C) $\sin x^2$ (D) $x^2 \sin x$

96. (C) दिया है, $f(x) = \sin x$

$g(x) = x^2$

$fog(x) = \sin(x^2) = \sin x^2$

97. वक्र $y = x^3$, x अक्ष तथा कोटियों $x = -2, x = 1$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल है—

The area of the region bounded by the curve $y = x^3$, x axis and the ordinates $x = -2$ and $x = 1$ is

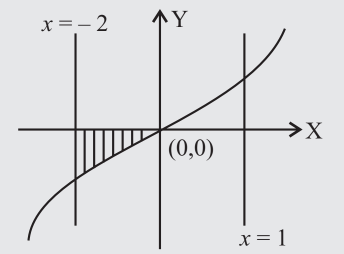
(A) 1 वर्ग इकाई/1 square unit

(B) $\frac{1}{4}$ वर्ग इकाई/ $\frac{1}{4}$ square unit

(C) $\frac{3}{4}$ वर्ग इकाई/ $\frac{3}{4}$ square unit

(D) $\frac{17}{4}$ वर्ग इकाई/ $\frac{17}{4}$ square unit

97. (D) दिया है, $y = x^3$, x-अक्ष $x = -2, x = 1$



$A = \int_{-2}^{0} x^3dx + \int_0^1 x^3dx$

$= \left|\frac{x^4}{4}\right|_{-2}^{0} + \left|\frac{x^4}{4}\right|_0^1$

$= \frac{(2)^4}{4} + \frac{1}{4}$

$= 4 + \frac{1}{4} = \frac{17}{4}$ वर्ग इकाई

98. $\sum_{r=0}^{n} 3^r\, {}^nC_r$ बराबर है—

$\sum_{r=0}^{n} 3^r\, {}^nC_r$ is equal to

(A) 2^n (B) 3^n

(C) 4^n (D) 1

98. (C) दिया है, $\sum_{r=0}^{n} 3^r\, {}^nC_r$

प्रसार करने पर, ${}^nC_0 + 3^1\,{}^nC_1 + 3^2\,{}^nC_2 + \ldots\ldots\ldots\, 3^n\,{}^nC_n$

हम जानते हैं, $(1+x)^n = {}^nC_0 + {}^nC_1x + {}^nC_2x^2 + \ldots\ldots$

$(1+3)^n = {}^nC_0 + 3^1\,{}^nC_1 + 3^2\,{}^nC_2 + \ldots\ldots\ldots$

अत: 4^n

99. यदि w, इकाई का घनमूल हो, तो $1 + w + w^2 + w^3 + \ldots\ldots + w^{52}$, $w \neq 1$ बराबर है—

If w is cube root of unity, then $1 + w + w^2 + w^3 + \ldots\ldots + w^{52}$, $w \neq 1$ is equal to

(A) w (B) $1 - w$
(C) $-w^2$ (D) $1 + w^2$

99. (C) दिया है, $1 + w + w^2 + w^3 + ... w^{52}$
हम जानते हैं, $1 + w + w^2 = 0, w^3 = 1$
तथा तीन क्रमागत घातों का योग जीरो होगा।

$\underbrace{1 + w + w^2} + \underbrace{w^3 + w^4 + w^5} + ...$

$\underbrace{w^{48} + w^{49} + w^{50}} + w^{51} + w^{52}$

$= w^{51} + w^{52} = (w^3)^{17} + w(w^3)^{17}$
$= 1 + w = -w^2$

100. क्रमशः 6 सेमी. तथा 3 सेमी. त्रिज्या के दो एक ही पदार्थ से बने समांग ठोस गोले दृढ़ता पूवर्क मिले हुये हैं। बड़े गोले के केन्द्र से सम्पूर्ण निकाय के गुरुत्व केन्द्र की दूरी है—

Two uniform solid spheres composed of the same material and having their radii 6 cm and 3 cm respectively are firmly united the distance of the centre of gravity of the whole body from the centre of the larger sphere is

(A) 4 सेमी./4 cm (B) 3 सेमी./3 cm
(C) 2 सेमी./2 cm (D) 1 सेमी./1 cm

100. (D) दिया है, $r_1 = 6, r_2 = 3$

$$V_1 = \frac{4}{3}\pi r_1^3 = \frac{4}{3}\pi \times (6)^3 = 288\pi$$

$$V_2 = \frac{4}{3}\pi \times 2^3 = \frac{4}{3}\pi \times (3)^3 = 36\pi$$

पहले बड़े गोले का भार $= V_1 \times W$
$= 288\pi W$

छोटे गोले का भार $= V_2 \times W$
$= 36\pi W$

बड़े गोले के केन्द्र से गु. केन्द्र की दूरी =

$$\frac{V_2 W(r_1 + r_2)}{V_1 W + V_2 W} = \frac{36\pi W \times 9}{288\pi W + 36\pi W}$$

$\Rightarrow$ 1 सेमी.

101. यदि T एक रैखिक रूपान्तरण $R^3 \to R^2$ पर है जो $T(x, y, z) = (x + y, y - z)$ से परिभाषित हैं तो क्रमित आधार $\{(1, 1, 1), (1, -1, 0), (0, 1, 0)\}$ तथा $\{(1, 1), (1, 0)\}$ से T की आव्यूह है—

Let T be a linear transformation from $R^3 \to R^2$, defined by $T(x, y, z) = (x + y, y - z)$ then the matrix T with respect to the ordered basis $\{(1, 1, 1), (1, -1, 0), (0, 1, 0)\}$ and $\{(1, 1), (1, 0)\}$ is

(A) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

101. (A) दिया है, $T : R^3 \to R^2, T(x, y, z) = (x + y, y - z)$
क्रमित आधार $\{(1, 1, 1), (1, -1, 0), (0, 1, 0)\}, \{(1, 1), (1, 0)\}$

$$T = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix}$$

$\{1, 1, 1\} = \{2, 0\} \Rightarrow a_1(1, 1) + a_2(2, 0)$
$\{1, -1, 0\} = \{0, -1\} \Rightarrow b_1(1, 1) + b_2(1, 0)$
$\{0, 1, 0\} = \{1, 1\} \Rightarrow c_1(1, 1) + c_2(1, 0)$
$(a_1, a_1) + (a_2, 0) = (a_1 + a_2, a_1) = (2, 0)$
$(b_1, b_1) + (b_2, 0) = (b_1 + b_2, b_1) = (0, -1)$
$(c_1, c_1) + (c_2, 0) = (c_1 + c_2, c_1) = (1, 1)$
$a_1 + a_2 = 2, a_1 = 0, b_1 + b_2 = 0$
$a_2 = 2, b_1 = -1, b_2 = 1$
$c_1 + c_2 = 1, c_1 = 1, c_2 = 0$

$$T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

102. माना V(F), क्षेत्र F पर एक परिमित विमीय सदिश समष्टि है तथा W, V का एक उप समष्टि है। यदि dim V = 5 तथा dim W = 3, तो dim W° है—

Let V(F) be a finite dimensional vector space over the field F and W be a subspace of V. If dim V = 5, dim W = 3, then dim W° is

(A) 2 (B) 3
(C) 1 (D) 8

102. (A) दिया है, dim V = 5, dim W = 3
dimW° = dimV – dimW = 5 – 3 = 2

103. यदि $y = 4x - 5$ वक्र $y^2 = ax^3 + b$ के बिन्दु (2, 3) पर स्पर्श रेखा का समीकरण हो, तो (a, b) बराबर है—

If $y = 4x - 5$ is equation of the tangent to a curve $y^2 = ax^3 + b$ at (2, 3), then (a, b) is equal to

(A) (2, 7) (B) (2, –7)
(C) (–2, 7) (D) (–2, –7)

103. (B) दिया है, $y = 4x - 5$ वक्र $y^2 = a^3 + b$ के बिन्दु (2, 3) पर स्पर्श रेखा समी. है।
बिन्दु (2, 3), $y^2 = ax^3 + b$ पर है।
अतः $(3)^2 = a(2)^3 + b \Rightarrow 9 = 8a + b$
$8a + b - 9 = 0$ ...(1)
विकल्प के प्रयोग से (2, –7) समी. 1 को संतुष्ट करेगा।

104. M द्रव्यमान तथा a त्रिज्या वाले खोखले गोले का जड़त्व आघूर्ण, व्यास से सापेक्ष है—

Moment of inertia of a hollow sphere about a diameter whose mass is M and radius a, is

(A) $M.\frac{2a^2}{3}$ (B) $M.\frac{2a^2}{5}$

(C) $M.\frac{a^2}{4}$ (D) $M.\frac{a^2}{3}$

104. (A) M द्रव्यमान तथा a त्रिज्या वाले खोखले गोले का जड़त्व आघूर्ण व्यास के सापेक्ष $M.\frac{2a^2}{3}$ होगा।

105. यदि (G, *) एक समूह है और $x * y = x + 2y - 3 \ \forall x, y \in G$, तो x का समूह में व्युत्क्रम है—

If (G, *) is a group and $x * y = x + 2y - 3 \ \forall x, y \in G$, then inverse of x in the group is

(A) $\frac{2x + 9}{4}$ (B) $\frac{9 - 2x}{4}$

(C) $\frac{x - 3}{4}$ (D) $\frac{x + 2}{4}$

105. (B) दिया है, $x * y = x + 2y - 3$

$x * x^{-1} = e$
$x * e = x + 2e - 3 = x$
$2e = 3$
$e = \frac{3}{2}$

$x * x^{-1} = \frac{3}{2}$
$= x + 2x^{-1} - 3$

$\frac{3}{2} + 3 - x = 2x^{-1}$

$\Rightarrow \frac{9 - 2x}{4} = x^{-1}$

106. यदि W(≠ 1) इकाई का एक घनमूल है तथा $(1 + W)^7 = A + BW$ हो, तो $A^2 + B^2$ का मान है—

If W(≠ 1) is a cube root of unity and $(1 + W)^7 = A + BW$, then the value of $A^2 + B^2$ is

(A) 0 (B) 1
(C) 2 (D) 4

106. (C) दिया है, $W^3 = 1$
$(1 + W)^7 = A + BW$
हम जानते हैं, $1 + W + W^2 = 0$
$1 + W = -W^2$
अतः $(-W^2)^7 = A + BW$
$W^{14} = A + BW$
$\Rightarrow W^2 = A + BW$
$\Rightarrow -1 - W = A + BW$
$A = -1, B = -1$
तब $A^2 + B^2 = 2$

107. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos 2\theta)^{\frac{3}{2}} \cos\theta d\theta$ का मान है—

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos 2\theta)^{\frac{3}{2}} \cos\theta d\theta$ is equal to

(A) $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ (B) $\frac{\pi}{4\sqrt{2}}$

(C) $\frac{3\pi}{16\sqrt{2}}$ (D) $\frac{3\pi}{8}$

107. (C) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos 2\theta)^{\frac{3}{2}} \cos\theta d\theta$

हम जानते हैं,

$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1-2\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}} \cos\theta d\theta$

माना $t = \sin\theta$

$dt = \cos\theta d\theta$

जब $\theta = 0, \theta = \frac{\pi}{4}$

$t = 0, t = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (1-2t^2)^{\frac{3}{2}} dt$

माना, $t = \frac{\sin u}{\sqrt{2}}, dt = \frac{\cos u}{\sqrt{2}} du$

जब $t = 0, u = 0$

$t = \frac{1}{\sqrt{2}}, u = \frac{\pi}{2}$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - 2\times\frac{\sin^2 u}{2}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{\cos u}{\sqrt{2}} du$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 u)^{\frac{3}{2}} \cos u\, du$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 u)^{\frac{3}{2}} \cos u\, du$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 u\, du$

हम जानते हैं, $\cos 2u = 2\cos^2 u - 1$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1+\cos u}{2}\right)^2 du$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4}(1+\cos^2 u + 2\cos u) du$

$= \frac{1}{4\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + 2\cos u + \frac{1+\cos 2u}{2}\right) du$

$= \frac{1}{4\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{3+5\cos 2u}{2}\right) du$

$= \frac{1}{4\sqrt{2}} \left[\frac{3u}{2} + \frac{5}{4}\sin 2u\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= \frac{1}{4\sqrt{2}} \left[\frac{3}{2}\times\frac{\pi}{2} + \frac{5}{4}\sin\pi - 0\right]$

$= \frac{1}{4\sqrt{2}} \times \frac{3\pi}{4} = \frac{3\pi}{16\sqrt{2}}$

108. यदि $y = -1$ जब $x = 0$, तो अवकल समीकरण $(1 + e^{2x})dy + (1 + y^2)e^x dx = 0$ का हल है—

If $y = -1$ when $x = 0$, then the solution of the differential equation $(1 + e^{2x})dy + (1 + y^2)e^x dx = 0$ is

(A) $\tan^{-1} y + \tan^{-1} e^x = 0$

(B) $\tan^{-1} xy + \tan^{-1} e^x = 0$

(C) $\tan^{-1} y + \tan^{-1} (xe^x) = 0$

(D) उपर्युक्त में से कोई नहीं/none of the above

108. (A) दिया है, $(1 + e^{2x})dy + (1 + y^2)e^x dx = 0$

$\frac{dy}{1+y^2} = \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx$

समाकलन करने पर,

$\int \frac{dy}{1+y^2} = \int \frac{-e^x}{1+e^{2x}} dx$

$\int \frac{dy}{1+y^2} = -\int \frac{e^x}{1+(e^x)^2} dx$

$\tan^{-1} y = t = e^x$

$\Rightarrow \quad dt = e^x dx$

$\tan^{-1} y = -\int \frac{dt}{1+t^2}$

$\Rightarrow \quad \tan^{-1} y = -\tan^{-1} t + c$

$\tan^{-1} y = -\tan^{-1} e^x + c$

जब $y = -1$ तब $x = 0$

$\tan^{-1}(-1) = -\tan e^0 + c$

$-\tan^{-1} y = -\tan 1 + c$

$c = 0$

$\tan^{-1} y + \tan^{-1} e^x = 0$

109. यदि $f(x) = ax^2 + 2bx + 1$, a और b धनात्मक वास्तविक संख्याएँ हैं तथा $b^2 < a$, तो निम्नलिखित में कौन सही होगा ?

If $f(x) = ax^2 + 2bx + 1$, a and b are positive real numbers and $b^2 < a$, then which of the following is correct ?

(A) $f(x) = 0 \ \forall x \in R$

(B) $f(x) > 0 \ \forall x \in R$

(C) $f(x) < 0 \ \forall x \in R$

(D) उपर्युक्त में से कोई नहीं/None of the above

109. (B) दिया है, $f(x) = ax^2 + 2bx + 1$, $a, b > 0$, $b^2 < a$

$D = b^2 - 4a$

$= 4b^2 - 4a$

$= 4(b^2 - a) \therefore b^2 < a$ अतः $D < 0$

यदि $D < 0, a > 0$ तब $f(x) > 0 \ \forall x \in R$

110. यदि H और K एक समूह G के उपसमूह इस प्रकार हैं कि O(H) = 3 और O(K) = 5, तो $O(H \cap K)$ क्या होगा ?

If H and K are subgroups of a group G such that O(H) = 3 and O(K) = 5, then what will be $O(H \cap K)$?

(A) 1 (B) 3

(C) 5 (D) 15

110. (A) दिया है, O(H) = 3, O(K) = 5

$O(H \cap K) = \frac{O(H) \times O(K)}{O(HK)}$

$= \frac{3 \times 5}{15} = 1$

111. द्विघात समीकरण

$x^2 + 2\sqrt{2}xy + 2y^2 + 4x + 4\sqrt{2}y + 1 = 0$

सरल रेखाओं का युग्म निरूपित करता है, तो इनके बीच की दूरी है—

The equation of second degree

$x^2 + 2\sqrt{2}xy + 2y^2 + 4x + 4\sqrt{2}y + 1 = 0$

represents a pair of straight lines, the distance between them is

(A) 4 (B) $\frac{4}{\sqrt{3}}$

(C) 2 (D) $2\sqrt{3}$

111. (C) दिया है, समी. $x^2 + 2\sqrt{2}\ xy + 2y^2 + 4x + 4\sqrt{2}\ y + 1 = 0$

समी. की तुलना $ax^2 + by^2 + 2gx + 2fy + 2hxy + c = 0$ से करने पर,

$a = 1, b = 2, 2f = 4\sqrt{2}, 2h = 2\sqrt{2}$

$2g = 4 \Rightarrow g = 2, f = 2\sqrt{2}, h = \sqrt{2}$,

$c = 2$

बीच की दूरी $d = 2\sqrt{\frac{g^2 - ac}{a(a+b)}}$

$= 2\sqrt{\frac{4 - 1\times 1}{1(1+2)}}$

$d = 2$

112. यदि $x^y = y^x$, तो $\frac{x}{y}\frac{dy}{dx}$ बराबर है—

If $x^y = y^x$, then $\frac{x}{y}\frac{dy}{dx}$ is equal to

(A) $\frac{x\log y + y}{y\log x + x}$ (B) $\frac{x\log y - y}{y\log x - x}$

(C) $\frac{y\log x + x}{x\log y + y}$ (D) $\frac{y\log x - x}{x\log y - y}$

112. (B) दिया है, $x^y = y^x$

दोनों तरफ log करने पर

$\log x^y = \log y^x$

$\Rightarrow \quad y\log x = x\log y$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$\frac{y}{x} + \log x \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}\frac{dy}{dx} + \log y$

$\frac{y}{x} - \log y = \frac{x}{y}\frac{dy}{dx} - \log x \frac{dy}{dx}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{y - x\log y}{x \times \frac{x - y\log x}{y}}$

$$\frac{x}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{y - x\log xy}{x - y\log x}$$

$$= \frac{x\log y - y}{y\log x - x}$$

113. एक कण वक्र $x = t^3 - 2, y = t^2 + 1, z = 2t + 1$ के अनुगत चलता है। $t = 1$ पर उसके त्वरण का घटक $\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ की दिशा में है—

A particle moves along the curve $x = t^3 - 2, y = t^2 + 1, z = 2t + 1$. The component of its acceleration at $t = 1$ in the direction $\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ is

(A) 4 (B) $4\sqrt{3}$

(C) $\frac{4}{\sqrt{3}}$ (D) 2

113. (C) दिया है, $x = t^3 - 2, y = t^2 + t, z = 2t + 1$

माना $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ एक moving vector है।

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\partial x}{\partial t}\hat{i} + \frac{\partial y}{\partial t}\hat{j} + \frac{\partial z}{\partial t}\hat{k}$$

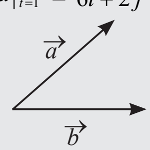
$$\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = \vec{a} = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\hat{i} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\hat{j} + \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\hat{k}$$

$$\frac{\partial x}{\partial t} = 3t^2,\ \frac{\partial y}{\partial t} = 2t,\ \frac{\partial z}{\partial t} = 2$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = 6t,\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 2,\ \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 0$$

$$\vec{a} = 6t\hat{i} + 2\hat{j}$$

$t = 1$ पर $\vec{a}|_{t=1} = 6\hat{i} + 2\hat{j}$



दिया है, $\vec{a}.\vec{b}$

तब $\vec{a}$ का $\vec{b}$

सापेक्ष घटक $= \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|}$

अतः $\frac{(6\hat{i} + 2\hat{j}).(\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})}{\sqrt{3}}$

$$= \frac{6-2}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

114. यदि $V = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$, तो $x\frac{\partial V}{\partial x} + y\frac{\partial V}{\partial y} + z\frac{\partial V}{\partial z}$ बराबर है—

If $V = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$, then $x\frac{\partial V}{\partial x} + y\frac{\partial V}{\partial y} + z\frac{\partial V}{\partial z}$ is equal to

(A) V (B) $\frac{1}{2}$V

(C) –V (D) 0

114. (C) दिया है, $V = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$

Euler's theorem के प्रयोग से,

$$x\frac{\partial V}{\partial x} + y\frac{\partial V}{\partial y} + z\frac{\partial V}{\partial z} = nv$$

put $x, y, z = dx, dy, dz$

$V = (d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2)^{-1/2}$

$\Rightarrow V = (d^2)^{-1/2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$

$\Rightarrow d^{-1}(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$

$\Rightarrow n = -1$

अतः $x\frac{\partial V}{\partial x} + y\frac{\partial V}{\partial y} + z\frac{\partial V}{\partial z} = -1 \times V$

$= -V$

115. यदि $f(x) = |x - 1| + |x|$ तो $f'(1)$ का मान है—

If $f(x) = |x - 1| + |x|$ then $f'(1)$ is equal to

(A) 0

(B) 1

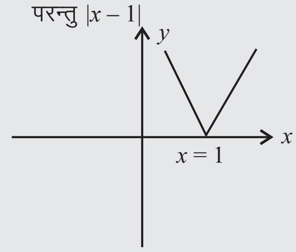
(C) –1

(D) अस्तित्व में नहीं/does not exist

115. (D) दिया है, $f(x) = |x - 1| + |x|$ तब $f'(1)$

$f'(1)$ का मान संभव होगा। यदि $f(x)$, $x = 1$ पर अवकलनीय होगा।

परन्तु $|x - 1|$



$f(x)$ अवकलनीय नहीं है।

अतः $f(x)$ का अस्तित्व नहीं है।

116. आंशिक समीकरण $(mz - ny)\frac{\partial z}{\partial y} + (nx - lz)\frac{\partial z}{\partial y} = ly - mx$ का हल है—

The solution of the partial differential equation $(mz - ny)\frac{\partial z}{\partial y} + (nx - lz)\frac{\partial z}{\partial y} = ly - mx$ is

(A) $f(x^2 + xz, y^2 + yz) = 0$

(B) $f(z^2 + xy, y^2 + xz) = 0$

(C) $f(x^2 + y^2, lx + my) - 0$

(D) $f(x^2 + y^2 + z^2, lx + my + nz) = 0$

116. (D) दिया है, $(mz - ny)\frac{\partial z}{\partial x} + (nx - lz)\frac{\partial z}{\partial y}$

$= ly - mx$

Lagrange's subsidiary समी. से

$$\frac{dx}{mz - ny} = \frac{dy}{nx - lz} = \frac{dz}{ly - mx} \quad ...(1)$$

$$\frac{xdx}{(mz - ny)x} = \frac{ydy}{(nx - lz)y}$$

$$= \frac{zdz}{(ly - mx)z}$$

$$= \frac{xdx + ydy + zdz}{(mz - ny)x + (nx - lz)y + (ly - mx)z}$$

$$= \frac{xdx + ydy + zdz}{0} = ly - mx$$

$\Rightarrow xdx + ydy + zdz = 0$

समाकलन करने पर,

$$\int xdx + \int ydy + \int zdz = \int 0$$

$x^2 + y^2 + z^2 = c_1$ ...(2)

पुनः $\frac{ldx + mdy + ndz}{l(mz - ny) + m(nx - lz) + n(ly - mx)}$

$ldx + mdy + ndz = 0$

समाकलन करने पर,

$lx + my + nz = c_2$ ...(3)

समी. 2 व 3 से

$f(x^2 + y^2 + z^2, lx + my + nz) = 0$

117. यदि $hxy + gx + fy = c, h \neq 0$ एक रेखा युग्म के समीकरण को निरूपित करता है, तो

If the equation $hxy + gx + fy = c, h \neq 0$ represents a pair of straight lines, then

(A) $fc + gh = 0$ (B) $fh + cg = 0$

(C) $gf + ch = 0$ (D) $gc + f^2 = 0$

117. (C) दिया है, $hxy + gx + fy = c$

रेखा युग्म को निरूपित करता है।

$ax^2 + by^2 + 2gx + 2fy + 2hxy + c = 0$

$\Delta = abc + 2fgy - af^2 - bg^2 - ch^2$

$$0 = 0 + 2.\frac{f}{2}.\frac{g}{2}.\frac{h}{2} - 0 - 0 + c.\frac{h^2}{4}$$

$fgh + ch^2 = 0$

$fg + ch = 0$

118. फलन $f(x) = |x - 5|$ के लिये निम्नलिखित में से कौन सही नहीं है ?

For the function $f(x) = |x - 5|$, which of the following is not correct ?

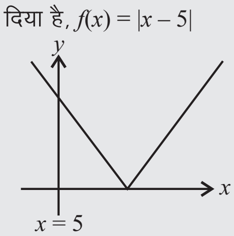
(A) फलन $x = 5$ पर सतत् है/The function $f(x)$ is continuous at $x = 5$

(B) फलन $x = -5$ पर सतत् नहीं है/The function $f(x)$ is not continuous at $x = -5$

(C) फलन $x = 0$ पर अवकलनीय है/The function $f(x)$ is differentiable at $x = 0$

(D) फलन $x = -5$ पर अवकलनीय है/The function $f(x)$ is differentiable at $x = -5$

118. (B) दिया है, $f(x) = |x - 5|$



अतः $x = 5$ पर अवकलनीय नहीं होगा परन्तु $x = 5$ पर सतत् होगा।

$x = -5$ पर सतत् के लिये

$$\lim_{x \to -5} |x - 5| = -(x - 5)$$

$$\lim_{x\to -5^+} -|x-5| = -(-5-5) = 10$$
$$\lim_{x\to -5^-} |x-5| = -(x-5)$$
$$\lim_{x\to -5^-} -|x-5| = 10$$
अतः $x = -5$ पर भी सतत् होगा।

119. अवकल समीकरण $k\frac{d^2y}{dx^2} = \left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}$ की कोटि एवं घात हैं—

The order and degree of the differential equation $k\frac{d^2y}{dx^2} = \left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}$ are

(A) कोटि 2 घात 3/order 2 degree 3
(B) कोटि 2 घात 2/order 2 degree 2
(C) कोटि 3 घात 2/order 3 degree 2
(D) उपर्युक्त में से कोई नहीं/None of the above

119. (B) दिया है, $k\frac{d^2y}{dx^2} = \left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}$

वर्ग करने पर,
$$k^2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 = 1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$
कोटि, घात = 2

120. यदि वक्र $y = f(x)$ के बिन्दु (a, b) पर अभिलम्ब धनात्मक x अक्ष से $\frac{3\pi}{4}$ कोण बनाता है, तो $f'(a)$ का मान बराबर है—

If the normal to curve $y = f(x)$ at the point (a, b) makes an angle $\frac{3\pi}{4}$ with the positive x axis, then $f'(a)$ is equal to

(A) 1 (B) –1
(C) $\frac{a}{b}$ (D) $\frac{b}{a}$

120. (A) दिया है, $y = f(x)$

अभिलम्ब का slope $m_n = \tan\frac{3\neq}{4} = -1$

अतः $M_T = \frac{M_N}{-1} = 1$

$f'(a) = M_T = 1$

121. यदि $u = \sin^{-1}\left(\frac{x^2+y^2}{x+y}\right)$, तो $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y}$ का मान बराबर है—

If $u = \sin^{-1}\left(\frac{x^2+y^2}{x+y}\right)$, then $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y}$ is equal to

(A) $\cos 2u$ (B) $\tan u$
(C) $\tan 2u$ (D) $\cot u$

121. (B) दिया है, $u = \sin^{-1}\frac{(x^2+y^2)}{x+y}$

Euler's theorem के प्रयोग से,
$$\sin u = \frac{x^2+y^2}{x+y} = f$$
$$f = \frac{x^2+y^2}{x+y} \Rightarrow \frac{(dx)^2+(dy)^2}{dx+dy}$$
$$= \frac{d(x^2+y^2)}{x+y}$$
$$f = \frac{d(x^2+y^2)}{x+y}$$
अतः $n = 1$

अतः $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 1f$

(Euler's theorem)
$$f = \sin u$$
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos u\frac{\partial u}{\partial x}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \cos u\frac{\partial u}{\partial y}$$
$$x\times\cos u\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y}\cos u = \sin u$$
समी. 1 से,
$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\sin u}{\cos u} = \tan u$$

122. यदि $W = \{(x, y, z) \in R^3 : x + y - z = 0\}$ सदिश समष्टि R^3 की उप समष्टि है, तो W की विमा है—

If $W = \{(x, y, z) \in R^3 : x + y - z = 0\}$ is subspace of the vector space R^3, then dim W is

(A) 0 (B) 1
(C) 2 (D) 3

122. (C) यदि $W = \{(x, y, z) \in R^3 : x + y - z = 0\}$
dimW = 3 – (स्वतंत्र अपवाद)
dimW = 3 – (1) = 2

123. यदि $y = \cos(3\cos^{-1}x)$, तो $\frac{d^3y}{dx^3}$ बराबर है—

If $y = \cos(3\cos^{-1}x)$, then $\frac{d^3y}{dx^3}$ is equal to

(A) 0 (B) 3
(C) 16 (D) 24

123. (D) दिया है, $y = \cos(3\cos^{-1}x)$
$$y = \cos\cos^{-1}(4x^3 - 3x)$$
हम जानते हैं,
$$y = 4x^3 - 3x$$
$$[3\cos^{-1}x = \cos^{-1}(4x^3 - 3x)]$$
x के सापेक्ष अवकलन करने पर,
$$\frac{dy}{dx} = 12x^2 - 3x$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = 24x - 3$$
$$\frac{d^3y}{dx^3} = 24$$

124. एक समूह जो कि क्रम विनिमेयी नहीं है, में कम से कम होते हैं—

A non-commutative group has at least

(A) 2 अवयव/2 elements
(B) 3 अवयव/3 elements
(C) 5 अवयव/5 elements
(D) 6 अवयव/6 elements

124. (D) एक समूह जो कि क्रम विनिमेयी नहीं है। में कम से कम 6 अवयव होते हैं। (प्रमेय से)

125. अतिपरवलय $2x^2 - 3y^2 = 6$ पर बिन्दु $(-2, -1)$ से खींची गयी स्पर्श रेखाओं के समीकरण हैं—

The equation of the tangents drawn from the point $(-2, -1)$ to the hyperbola $2x^2 - 3y^2 = 6$ are

(A) $3x + y + 5 = 0, x - y + 1 = 0$
(B) $3x + y + 5 = 0, x + y + 1 = 0$
(C) $3x - y + 5 = 0, x + y + 1 = 0$
(D) $3x - y + 5 = 0, x - y + 1 = 0$

125. (D) दिया है, अतिपरवलय $2x^2 - 3y^2 = 6$
$$\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{2} = 1$$
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ से तुलना करने पर,
$$\Rightarrow \quad a^2 = 3, b^2 = 2$$
बिन्दु $(-2, -1)$ से खींची गयी स्पर्श रेखाओं के समीकरण
$$y = mx + \sqrt{a^2m^2 - b^2} \quad ...(1)$$
$$-1 = m\times(-2) + \sqrt{3m^2 - 2}$$
$$2m - 1 = \sqrt{3m^2 - 2}$$
$$(2m - 1)^2 = 3m^2 - 1$$
$$4m^2 + 1 - 4m = 3m^2 - 2$$
$$m^2 - 4m + 1 + 2 = 0$$
$$m^2 - 4m + 3 = 0$$
$$m^2 - 3m - m + 3 = 0$$
$$m(m - 3) - 1(m - 3) = 0$$
$$(m - 3)(m - 1) = 0$$
$$\therefore m = 3, 1$$
अतः स्पर्श रेखाओं के समीकरण
$3x - y + 5 = 0, x - y + 1 = 0$

❑❑